

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

УМАНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ САДІВНИЦТВА

Кафедра математики і фізики

В. Є. Березовський, С. В. Лещенко, І.І. Побережець

Практикум з вищої математики

Умань - 2021

УДК 517(076)

Рецензенти:

Медведєва М. О., кандидат педагогічних наук, доцент кафедри вищої математики та методики викладання математики Уманського державного педагогічного університету.

Дякон В.М., кандидат фізико-математичних наук, доцент, директор Уманської філії Європейського університету

Рекомендовано кафедрою математики і фізики
Уманського національного університету садівництва
(протокол № 1 від 31.08.2021 р.)

Практикум з вищої математики: навчальний посібник для здобувачів першого (бакалаврський) та початкового (короткий курс) рівнів вищої освіти спеціальностей 091 Біологія та 101 Екологія // Укладачі: В. Є. Березовський, С. В. Лещенко, І.І. Побережець, - Умань: Видавничо-поліграфічний центр УНУС, 2021.-161 с.

Практикум містить зразки розв'язання задач, а також задачі та вправи для організації аудиторних занять і самостійної роботи студентів

УДК 517(076)

© Березовський В. Є., 2021;
© Лещенко С. В., 2021;
© Побережець І.І., 2021.

| | |
|---|-----|
| ПЕРЕДМОВА | 4 |
| Розділ I Елементи лінійної алгебри, векторної алгебри та аналітичної геометрії | |
| § 1. Елементи лінійної алгебри | 5 |
| <i>Завдання для самостійної роботи</i> | 7 |
| § 2. Елементи векторної алгебри | 28 |
| <i>Завдання для самостійної роботи</i> | 32 |
| § 3. Елементи аналітичної геометрії | 29 |
| <i>Завдання для самостійної роботи</i> | 33 |
| Розділ II. Вступ в математичний аналіз. Диференціальне та інтегральне числення | |
| § 1. Вступ в математичний аналіз..... | 38 |
| <i>Завдання для самостійної роботи</i> | 41 |
| § 2. Диференціальне числення функції однієї змінної..... | 48 |
| <i>Завдання для самостійної роботи</i> | 57 |
| § 3. Інтегральне числення функції однієї змінної | 67 |
| <i>Завдання для самостійної роботи</i> | 73 |
| § 4. Функції декількох змінних(основні поняття). | 89 |
| <i>Завдання для самостійної роботи</i> | 91 |
| Розділ III. Диференціальні рівняння. Ряди | |
| § 1. Диференціальні рівняння..... | 95 |
| <i>Завдання для самостійної роботи</i> | 97 |
| § 2. Ряди..... | 103 |
| <i>Завдання для самостійної роботи</i> | 105 |
| Розділ IV. Елементи теорії ймовірностей та основи математичної статистики | |
| §1. Елементи теорії ймовірностей | 108 |
| <i>Завдання для самостійної роботи</i> | 111 |
| § 2. Основи математичної статистики..... | 125 |
| <i>Завдання для самостійної роботи</i> | 129 |
| Додатки | 151 |
| Література | 161 |

ПЕРЕДМОВА

Сучасні вимоги до спеціаліста поставили перед вищою школою завдання подальшого удосконалювання якості навчання і підготовки фахівців для народного господарства. Виховання сучасного фахівця, що гармонічно сполучає у собі професійну майстерність, широку наукову ерудицію, тісно пов'язане з процесом постійного вдосконалення навчально-методичної роботи, підвищенням якості й ефективності всього навчального процесу.

У вирішенні поставленого завдання усе більшу роль набуває математична освіта, оскільки в сучасній науці і техніці, у виробництві й управлінні народним господарством безупинно зростає роль математичних методів моделювання, проектування, дослідження, планування.

Викладання курсу вищої математики в спеціальних вищих навчальних закладах має на меті:

- розвиток інтелекту студентів, їх загальнонаукового, логічного й алгоритмічного мислення;

- оволодіння основними математичними методами вирішення спеціальних задач прикладного характеру по профілю діяльності майбутніх фахівців.

Досягнення наміченої цілі передбачає вирішення ряду основних задач.

У процесі освоєння курсу вищої математики і наступного застосування математичних знань при вивченні загальнонаукових і спеціальних дисциплін студент повинен навчитися:

- формулювати найпростіші прикладні завдання і створювати математичні моделі реальних об'єктів і процесів, що протікають у них;

- вибирати чи розробляти раціональні методи дослідження створених моделей, проводити їхній якісний аналіз, використовувати основні чисельні методи, застосовувати сучасну обчислювальну техніку;

- аналізувати отримані дані, виробляти на їхній основі практичні рекомендації;

- самостійно освоювати нові математичні методи досліджень і рішення практичних задач.

Загальний курс вищої математики є фундаментом математичного формування фахівця. В той же час вже в рамках самого курсу цілеспрямовано проводиться лінія на застосування математичних методів у загальнонауковій та професійній діяльності майбутніх спеціалістів.

Важливим фактором успішного оволодіння математичними методами досліджень є систематична робота студентів над курсом математики. Результативність самостійної роботи студентів забезпечується ефективною системою контролю, що включає опитування студентів по змісту лекцій, перевірку виконання поточних завдань, проведення контрольних робіт.

Розділ I Елементи лінійної алгебри, векторної алгебри та аналітичної геометрії

§ 1. Елементи лінійної алгебри

Приклад 1. Розв'язати систему, використовуючи формули Крамера:

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) - 3 \cdot 1 = -5$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 = -5$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 3 \cdot 4 = 10$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-5}{-5} = 1$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{10}{-5} = -2$$

Приклад 2. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 2 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & 5 \\ 5 & -7 & 1 \end{vmatrix}$.

Розв'язання. $\begin{vmatrix} 2 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & 5 \\ 5 & -7 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot 1 + 4 \cdot 5 \cdot 5 + 0 \cdot (-7) \cdot (-5) - (-5) \cdot 2 \cdot 5 - 0 \cdot 4 \cdot 1 - (-7) \cdot 5 \cdot 2 =$
 $= 4 + 100 + 50 + 70 = 224.$

Приклад 3. Використовуючи формули Крамера розв'язати систему

$$\begin{cases} 2x + 3y - 5z = -7, \\ -3x + 2y + 4z = 13, \\ 5x - 6y + z = -4 \end{cases}$$

Розв'язання. Обчислюємо визначники:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ -3 & 2 & 4 \\ 5 & -6 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 60 - 90 + 50 + 9 + 48 = 81;$$

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} -7 & 3 & -5 \\ 13 & 2 & 4 \\ -4 & -6 & 1 \end{vmatrix} = -14 - 48 + 390 - 40 - 39 - 168 = 81;$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 2 & -7 & -5 \\ -3 & 13 & 4 \\ 5 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 26 - 140 - 60 + 325 - 21 + 32 = 162;$$

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -7 \\ -3 & 2 & 13 \\ 5 & -6 & -4 \end{vmatrix} = -16 + 195 - 126 + 70 - 36 + 156 = 243.$$

Тоді згідно формул Крамера система рівнянь має розв'язок:

$$\begin{cases} x = \frac{81}{81} = 1; \\ x = \frac{162}{81} = 2; \\ x = \frac{243}{81} = 3. \end{cases}$$

Приклад 4. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & 7 & 1 \\ 8 & -2 & 4 \end{vmatrix}$, розклавши його за елементами

деякого рядка чи стовпця.

Розв'язання. Розкладемо визначник за елементами другого стовпця:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & 7 & 1 \\ 8 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} + 7 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} + (-2) \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -3(-12 - 8) + 7(4 - 24) + 2(1 + 9) = 60 - 140 + 20 = -60.$$

Приклад 5.

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 7 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 4 + 5 \cdot 5 + 6 \cdot 0 & 2 \cdot 3 + 5 \cdot 7 + 6 \cdot 7 \\ 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + 1 \cdot 0 & 3 \cdot 3 + 4 \cdot 7 + 1 \cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 & 83 \\ 32 & 44 \end{pmatrix}.$$

Приклад 6. Розв'язати за допомогою оберненої матриці систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 = -9, \\ -3x_1 - 4x_2 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$$

Розв'язання. Введемо в розгляд матриці $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -2 \\ -3 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

Запишемо систему рівнянь у матричній формі $A \cdot X = B$.

Визначник матриці

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -2 \\ -3 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0.$$

Знайдемо алгебраїчні доповнення до кожного елемента матриці A :

$$\begin{aligned}
A_{11} &= (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -4; & A_{12} &= (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3; & A_{13} &= (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1; \\
A_{21} &= (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -7; & A_{22} &= (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4; & A_{23} &= (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3; & A_{31} &= \\
(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} &= -8; & A_{32} &= (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = 6; & A_{33} &= (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} = 7.
\end{aligned}$$

Отже, обернена матриця має вигляд

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -4 & -7 & -8 \\ 3 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Тоді розв'язок системи рівнянь $X = A^{-1}B$. Отже,

$$X = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -4 & -7 & -8 \\ 3 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} (-4) \cdot (-9) + (-7) \cdot 1 + (-8) \cdot 3 \\ 3 \cdot (-9) + 4 \cdot 1 + 6 \cdot 3 \\ 1 \cdot (-9) + 3 \cdot 1 + 7 \cdot 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Завдання для самостійної роботи

Завдання 1. Розв'язати систему рівнянь за допомогою визначників:

- 1) $\begin{cases} 3x - 4y = 8, \\ -5x + 3y = -6; \end{cases}$
- 2) $\begin{cases} 2x - 3y = -10, \\ -5x + 2y = 3; \end{cases}$
- 3) $\begin{cases} 6x + 3y = -12, \\ 3x - 2y = 1; \end{cases}$
- 4) $\begin{cases} -2x + 6y = -10, \\ x - 9y = 5; \end{cases}$
- 5) $\begin{cases} 7x + 5y = 1, \\ 9x + 6y = 0; \end{cases}$
- 6) $\begin{cases} 7x - 9y = 14, \\ -5x + 8y = -10; \end{cases}$
- 7) $\begin{cases} 8x - 3y = -9, \\ -6x + 2y = 8; \end{cases}$
- 8) $\begin{cases} 9x - 6y = 18, \\ -6x + 12y = -12; \end{cases}$
- 9) $\begin{cases} 6x - 3y = 3, \\ -2x + 5y = 3; \end{cases}$
- 10) $\begin{cases} 3x + 4y = 14, \\ -5x + 5y = 0; \end{cases}$
- 11) $\begin{cases} 3x - 2y = 3, \\ -2x + 3y = 3; \end{cases}$
- 12) $\begin{cases} 5x - 2y = 9, \\ -6x + 4y = -14; \end{cases}$
- 13) $\begin{cases} 9x - y = 5, \\ -8x + 3y = -15; \end{cases}$
- 14) $\begin{cases} 3x - 4y = 0, \\ -5x + 3y = -11; \end{cases}$
- 15) $\begin{cases} 3x - 4y = 1, \\ -5x + 3y = 2; \end{cases}$

$$16) \begin{cases} -3x - 9y = 12, \\ -4x + 7y = -16; \end{cases}$$

$$17) \begin{cases} 10x + 2y = -6, \\ -8x - 3y = 9; \end{cases}$$

$$18) \begin{cases} -4x + 5y = -1, \\ -6x - 5y = 11; \end{cases}$$

$$19) \begin{cases} 7x + 5y = -6, \\ -6x - 3y = 0; \end{cases}$$

$$20) \begin{cases} 3x - 5y = 9, \\ -5x + 4y = -2; \end{cases}$$

$$21) \begin{cases} -14x + 3y = -15, \\ -8x - 2y = 10; \end{cases}$$

$$22) \begin{cases} -4x - 9y = -8, \\ 5x + 6y = 10; \end{cases}$$

$$23) \begin{cases} 2x - 3y = -4, \\ x - 4y = 12; \end{cases}$$

$$24) \begin{cases} -3x + 5y = -3, \\ x - 4y = -6; \end{cases}$$

$$25) \begin{cases} -3x + 4y = 8, \\ -6x - 3y = 9; \end{cases}$$

$$26) \begin{cases} -4x - 3y = -3, \\ -9x - 2y = 17; \end{cases}$$

$$27) \begin{cases} 10x + 9y = 12, \\ 6x + 5y = 8; \end{cases}$$

$$28) \begin{cases} x - 2y = 7, \\ 3x - 4y = 11; \end{cases}$$

$$29) \begin{cases} 12x - y = -7, \\ -9x + 2y = 14; \end{cases}$$

$$30) \begin{cases} -2x - 9y = 12, \\ x + 8y = -6. \end{cases}$$

Завдання 2. Обчислити визначник третього порядку:

$$1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix};$$

$$2) \begin{vmatrix} -2 & 3 & -5 \\ 7 & -3 & 9 \\ 8 & -2 & 4 \end{vmatrix};$$

$$3) \begin{vmatrix} -5 & 1 & -2 \\ 9 & -2 & 6 \\ 3 & -2 & 7 \end{vmatrix};$$

$$4) \begin{vmatrix} -1 & 6 & 3 \\ -3 & 5 & 5 \\ 2 & -8 & 7 \end{vmatrix};$$

$$5) \begin{vmatrix} -5 & 3 & -2 \\ 5 & -6 & -3 \\ 9 & -9 & -4 \end{vmatrix};$$

$$6) \begin{vmatrix} -7 & 1 & -9 \\ -5 & -7 & 6 \\ 2 & -2 & -8 \end{vmatrix};$$

$$7) \begin{vmatrix} -3 & 2 & -5 \\ 9 & -5 & -6 \\ -7 & 5 & -4 \end{vmatrix};$$

$$8) \begin{vmatrix} -2 & -3 & -5 \\ -7 & -3 & -9 \\ -8 & -2 & -4 \end{vmatrix};$$

$$9) \begin{vmatrix} 5 & -1 & -7 \\ 4 & -6 & 6 \\ 3 & -3 & 9 \end{vmatrix};$$

$$10) \begin{vmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix};$$

$$11) \begin{vmatrix} -6 & 3 & -8 \\ 6 & -4 & 5 \\ 7 & -2 & 6 \end{vmatrix};$$

$$12) \begin{vmatrix} -6 & 9 & -8 \\ 9 & -7 & 4 \\ 2 & -2 & 9 \end{vmatrix};$$

$$13) \begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 4 & -5 & -6 \\ -7 & 8 & -9 \end{vmatrix}; \quad 14) \begin{vmatrix} -9 & 6 & -5 \\ 7 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}; \quad 15) \begin{vmatrix} -7 & 9 & -8 \\ 1 & -1 & 5 \\ 4 & -2 & 8 \end{vmatrix};$$

$$16) \begin{vmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 7 & 9 & 9 \end{vmatrix}; \quad 17) \begin{vmatrix} -4 & 2 & -1 \\ 5 & -3 & -2 \\ 8 & -9 & -9 \end{vmatrix}; \quad 18) \begin{vmatrix} -6 & 4 & -8 \\ 9 & -5 & -2 \\ 3 & -8 & -4 \end{vmatrix};$$

$$19) \begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 \\ -4 & 5 & -6 \\ 7 & -8 & -9 \end{vmatrix}; \quad 20) \begin{vmatrix} -8 & 4 & -6 \\ 7 & -4 & 3 \\ 7 & -7 & 4 \end{vmatrix}; \quad 21) \begin{vmatrix} -3 & 1 & -8 \\ 4 & -4 & 9 \\ 5 & -5 & -7 \end{vmatrix};$$

$$22) \begin{vmatrix} 4 & 4 & -3 \\ 5 & 5 & -6 \\ 7 & 7 & -9 \end{vmatrix}; \quad 23) \begin{vmatrix} -9 & 9 & -4 \\ 8 & -3 & 3 \\ 4 & -2 & 4 \end{vmatrix}; \quad 24) \begin{vmatrix} -3 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 9 \\ 4 & -2 & 8 \end{vmatrix};$$

$$25) \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -5 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{vmatrix}; \quad 26) \begin{vmatrix} -6 & 3 & -5 \\ 9 & -2 & 9 \\ 7 & -2 & 1 \end{vmatrix}; \quad 27) \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -8 & -3 & 6 \\ -2 & -4 & 3 \end{vmatrix};$$

$$28) \begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 0 & 9 \end{vmatrix}; \quad 29) \begin{vmatrix} -1 & 6 & -6 \\ 5 & -5 & 7 \\ 0 & -2 & 9 \end{vmatrix}; \quad 30) \begin{vmatrix} -5 & 1 & -9 \\ 9 & 0 & 6 \\ 8 & -2 & 9 \end{vmatrix};$$

Завдання 3. Розв'язати систему рівнянь за правилом Крамера:

$$1) \begin{cases} 2x + 3y + z = 1, \\ x + y - 4z = 0, \\ 4x + 5y - 3z = 1, \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 5x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 + 10x_2 + x_3 = -7, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -2, \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x + y - 3z = 0, \\ x + 2y + 2z = -1, \\ 3x \\ x - y + 5z = -2, \end{cases} \quad 4) \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 = -1, \\ 5x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 1, \end{cases}$$

- 5)
$$\begin{cases} 3x - 3y + 2z = -4, \\ 2x + y - 3z = -1, \\ x - 2y + 5z = 1, \end{cases}$$
- 7)
$$\begin{cases} 4x - y + 3z = 1, \\ + 2y + 4z = 8, \\ 3x \\ 2x - 2y + 4z = 0, \end{cases}$$
- 9)
$$\begin{cases} 3x - 3y + 2z = -4, \\ 2x + y - 3z = -1, \\ x - 2y + 5z = 1, \end{cases}$$
- 11)
$$\begin{cases} 3x - y + 4z = -3, \\ x + 2y + 2z = 3, \\ 5x + 3y + 2z = 9, \end{cases}$$
- 13)
$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 1, \\ 2x - 3y - z = -7, \\ 4x + y - 2z = 0, \end{cases}$$
- 15)
$$\begin{cases} 2x + 4y - 3z = 2, \\ x + y + 2z = 0, \\ 3x - 2y + z = -5, \end{cases}$$
- 17)
$$\begin{cases} x - 4y + 2z = 4, \\ 4x + y - 3z = 5, \\ 2x + 3y + 4z = 8, \end{cases}$$
- 19)
$$\begin{cases} 3x - 2y - z = -5, \\ x + 3y + 2z = 2, \\ 5x - 2y + 4z = -7, \end{cases}$$
- 21)
$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 1, \\ x + y - 4z = 0, \\ 4x + 5y - 3z = 1, \end{cases}$$
- 23)
$$\begin{cases} x + y - 3z = 0, \\ + 2y + 2z = -1, \\ 3x \\ x - y + 5z = -2, \end{cases}$$
- 6)
$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 - 3x_3 = 2, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 3, \\ -2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1, \end{cases}$$
- 8)
$$\begin{cases} -2x_1 + 4x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 2, \\ x_1 + 2x_3 = -1, \end{cases}$$
- 10)
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = -7, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 5, \end{cases}$$
- 12)
$$\begin{cases} -x_1 - 3x_2 - 6x_3 = 2, \\ 3x_1 - 7x_2 - 5x_3 = 1, \\ -10x_1 + 11x_2 = 1, \end{cases}$$
- 14)
$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + x_3 = 3, \\ -x_1 - 6x_2 - 2x_3 = 1, \\ 7x_1 + 8x_2 + 3x_3 = 5, \end{cases}$$
- 16)
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 1, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 6, \end{cases}$$
- 18)
$$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 8x_3 = 2, \\ -4x_1 + 11x_2 + 5x_3 = 2, \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 = -4, \end{cases}$$
- 20)
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5, \\ -2x_1 + 7x_2 + 5x_3 = -7, \\ 3x_1 - 6x_2 - 7x_3 = -5, \end{cases}$$
- 22)
$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + x_3 = -1, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 1, \\ 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 8, \end{cases}$$
- 24)
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 4, \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 1, \\ 5x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 2, \end{cases}$$

$$25) \begin{cases} 2x - y + 3z = 1, \\ x - 2y - 5z = -9, \\ 4x + 3y - 2z = 4, \end{cases}$$

$$27) \begin{cases} 4x - y + 3z = 1, \\ 3x + 2y + 4z = 8, \\ 2x - 2y + 4z = 0, \end{cases}$$

$$29) \begin{cases} 3x - 3y + 2z = 7, \\ 2x + y - 2z = -5, \\ x - 2y + 5z = 12, \end{cases}$$

$$26) \begin{cases} -2x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 2, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -2, \\ x_1 + 4x_3 = 9, \end{cases}$$

$$28) \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 = -1, \\ 7x_1 + x_2 + 7x_3 = 1, \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 = 2, \end{cases}$$

$$30) \begin{cases} -3x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ 6x_1 + 7x_2 - x_3 = -3, \\ 5x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 9, \end{cases}$$

Завдання 4. Знайти розв'язки рівняння чи нерівності:

$$1) \begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad 2) \begin{vmatrix} x^2 & 3 & 2 \\ x & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} < 0; \quad 3) \begin{vmatrix} x^2 & 4 & -2 \\ x & 2 & -1 \\ 1 & 5 & -1 \end{vmatrix} > 0;$$

$$4) \begin{vmatrix} x^2 & 5 & 9 \\ x & 6 & 3 \\ 1 & 9 & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad 5) \begin{vmatrix} x^2 & -7 & 9 \\ x & -2 & 3 \\ 1 & -5 & 1 \end{vmatrix} \leq 0; \quad 6) \begin{vmatrix} x & -6 & 4 \\ x^2 & 12 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} \geq 0;$$

$$7) \begin{vmatrix} 5 & -9 & x^2 \\ 4 & -3 & x \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0; \quad 8) \begin{vmatrix} 6 & 4 & 9 \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & x & x^2 \end{vmatrix} < 0; \quad 9) \begin{vmatrix} 4 & 4 & x^2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 8 & 7 & 1 \end{vmatrix} > 0;$$

$$10) \begin{vmatrix} 6 & 4 & 9 \\ x & 2 & x \\ 1 & x & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad 11) \begin{vmatrix} x & 3 & 9 \\ x & 3 & x \\ 8 & -8 & 6 \end{vmatrix} \leq 0; \quad 12) \begin{vmatrix} x^2 & x & 9 \\ 4 & -2 & 3 \\ x & 1 & 1 \end{vmatrix} \geq 0;$$

$$13) \begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 5 & 4 \\ x & 8 & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad 14) \begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & -12 & 3 \\ 1 & 9 & 1 \end{vmatrix} < 0; \quad 15) \begin{vmatrix} -1 & 5 & -3 \\ x^2 & 4 & 12 \\ x & 1 & 6 \end{vmatrix} > 0;$$

$$16) \begin{vmatrix} x & 4 & 9 \\ x & x & 3 \\ 3 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 0; \quad 17) \begin{vmatrix} x^2 & 4 & x \\ 25 & 4 & 5 \\ 7 & 2 & 6 \end{vmatrix} \leq 0; \quad 18) \begin{vmatrix} x^2 & 16 & 9 \\ x & -4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \geq 0;$$

$$19) \begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad 20) \begin{vmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 9 \\ 4 & x & x^2 \end{vmatrix} < 0; \quad 21) \begin{vmatrix} -4 & -3 & 9 \\ -4 & x & x^2 \\ 5 & 4 & 0 \end{vmatrix} > 0;$$

$$22) \begin{vmatrix} 5 & 1 & x^2 \\ 7 & -1 & x \\ 2 & -3 & -3 \end{vmatrix} = 0; \quad 23) \begin{vmatrix} 1 & x^2 & 2 \\ -1 & x & 4 \\ 5 & 5 & 1 \end{vmatrix} \leq 0; \quad 24) \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 3 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \geq 0;$$

$$25) \begin{vmatrix} x^2 & x & 2 \\ 16 & -4 & 2 \\ 5 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0; \quad 26) \begin{vmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 25 & 1 & -5 \\ x^2 & 1 & x \end{vmatrix} < 0; \quad 27) \begin{vmatrix} 4 & 0 & 5 \\ x^2 & x & -2 \\ 9 & 3 & -2 \end{vmatrix} > 0;$$

$$28) \begin{vmatrix} x & x^2 & 9 \\ -2 & 4 & 9 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad 29) \begin{vmatrix} -4 & 0 & 16 \\ x & 0 & x^2 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} \leq 0; \quad 30) \begin{vmatrix} x^2 & 3 & -x \\ 4 & 3 & -2 \\ 7 & 5 & 9 \end{vmatrix} \geq 0.$$

Завдання 5. Обчислити значення визначника, не розкриваючи його:

$$1) \quad \text{а) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 18 & 1 & 0 & 4 \\ 15 & 2 & 0 & 5 \\ 17 & 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 9 \\ 3 & 6 & 1 \end{vmatrix}; \quad \text{в) } \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \\ 7 & 6 & 5 \end{vmatrix};$$

$$2) \quad \text{а) } \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 6 & 0 \\ 5 & 7 & 8 & 0 \\ 9 & 4 & 5 & 0 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & 8 & 3 \\ 3 & 12 & 5 \end{vmatrix}; \quad \text{в) } \begin{vmatrix} 8 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 7 \\ 6 & -2 & -7 \end{vmatrix};$$

$$3) \quad \text{a)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 4 & 0 & 6 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 8 \\ 5 & 0 & 6 & 3 \end{vmatrix}; \quad \text{б)} \begin{vmatrix} 2 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & 9 \\ 3 & 9 & 5 \end{vmatrix}; \quad \text{в)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \\ 6 & 10 & 2 \end{vmatrix};$$

$$4) \quad \text{a)} \begin{vmatrix} 4 & 0 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 5 & 8 \\ 5 & 0 & 7 & 1 \end{vmatrix}; \quad \text{б)} \begin{vmatrix} 3 & 6 & 7 \\ 4 & 8 & 1 \\ 8 & 16 & 9 \end{vmatrix}; \quad \text{в)} \begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 5 \\ 5 & 7 & 9 \end{vmatrix};$$

$$5) \quad \text{a)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 18 & 1 & 0 & 4 \\ 14 & 2 & 0 & 5 \\ 18 & 4 & 0 & 4 \end{vmatrix}; \quad \text{б)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 12 \\ 3 & 6 & 1 \end{vmatrix}; \quad \text{в)} \begin{vmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \\ 7 & 6 & 5 \end{vmatrix};$$

$$6) \quad \text{a)} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 4 & 8 & 5 & 0 \\ 5 & 7 & 9 & 0 \\ 4 & 4 & 5 & 0 \end{vmatrix}; \quad \text{б)} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 7 & 3 \\ 3 & 12 & 6 \end{vmatrix}; \quad \text{в)} \begin{vmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 5 & 6 & 2 \end{vmatrix};$$

$$7) \quad \text{a)} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 6 & 8 & 0 \end{vmatrix}; \quad \text{б)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 12 \\ 3 & 7 & 9 \end{vmatrix}; \quad \text{в)} \begin{vmatrix} 8 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \\ 7 & 6 & 5 \end{vmatrix};$$

$$8) \quad \text{a)} \begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 & 5 \\ 14 & 1 & 0 & 7 \\ 11 & 2 & 0 & 8 \\ 16 & 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}; \quad \text{б)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 9 \\ 3 & 6 & 1 \end{vmatrix}; \quad \text{в)} \begin{vmatrix} 14 & 7 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \\ 7 & 6 & 5 \end{vmatrix};$$

$$9) \quad \text{a)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 & 3 \\ 18 & 0 & 9 & 4 \\ 14 & 0 & 5 & 5 \\ 17 & 0 & 7 & 1 \end{vmatrix}; \quad \text{б)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}; \quad \text{в)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \\ 6 & 10 & 2 \end{vmatrix};$$

$$10) \quad a) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 19 & 1 & 2 & 0 \\ 14 & 5 & 4 & 0 \\ 17 & 4 & 6 & 0 \end{vmatrix};$$

$$б) \begin{vmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 4 & 2 & 6 \\ 8 & 4 & 12 \end{vmatrix};$$

$$в) \begin{vmatrix} 8 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 7 \\ 8 & 3 & 2 \end{vmatrix};$$

$$11) \quad a) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 18 & 0 & 2 & 4 \\ 13 & 0 & 9 & 5 \\ 16 & 0 & 5 & 1 \end{vmatrix};$$

$$б) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 8 & 9 \\ 4 & 6 & 12 \end{vmatrix};$$

$$в) \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \\ 5 & 7 & 2 \end{vmatrix};$$

$$12) \quad a) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 23 & 1 & 0 & 7 \\ 35 & 7 & 0 & 5 \\ 13 & 4 & 0 & 1 \end{vmatrix};$$

$$б) \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 4 & 3 & 12 \\ 3 & 4 & 9 \end{vmatrix};$$

$$в) \begin{vmatrix} 12 & 6 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \\ 7 & 6 & 5 \end{vmatrix};$$

$$13) \quad a) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 48 & 1 & 0 & 8 \\ 35 & 2 & 0 & 9 \\ 67 & 7 & 0 & 1 \end{vmatrix};$$

$$б) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & 16 \\ 3 & 7 & 12 \end{vmatrix};$$

$$в) \begin{vmatrix} 24 & 12 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \\ 7 & 6 & 5 \end{vmatrix};$$

$$14) \quad a) \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ 5 & 7 & 7 & 0 \\ 5 & 4 & 2 & 0 \end{vmatrix};$$

$$б) \begin{vmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 7 & 8 & 16 \\ 3 & 12 & 24 \end{vmatrix};$$

$$в) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 7 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix};$$

$$15) \quad a) \begin{vmatrix} 1 & 7 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 5 & 0 \\ 3 & 5 & 8 & 0 \\ 7 & 4 & 5 & 0 \end{vmatrix};$$

$$б) \begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & 9 & 12 \\ 3 & 12 & 18 \end{vmatrix};$$

$$в) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 7 \\ 6 & 4 & 2 \end{vmatrix};$$

$$16) \quad a) \begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & 6 & 6 \\ 0 & 7 & 8 & 5 \\ 0 & 4 & 5 & 4 \end{vmatrix};$$

$$б) \begin{vmatrix} 1 & 4 & 20 \\ 7 & 8 & 40 \\ 3 & 12 & 60 \end{vmatrix};$$

$$в) \begin{vmatrix} 12 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix};$$

$$17) \quad \text{a)} \begin{vmatrix} 1 & 6 & 4 & 0 \\ 3 & 7 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & 8 & 0 \\ 9 & 3 & 9 & 0 \end{vmatrix}; \quad \text{б)} \begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 4 & 8 & 3 \\ 6 & 12 & 5 \end{vmatrix}; \quad \text{в)} \begin{vmatrix} 40 & 10 & 0 \\ 2 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix};$$

$$18) \quad \text{a)} \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 0 & 4 \\ 5 & 7 & 0 & 5 \\ 9 & 4 & 0 & 2 \end{vmatrix}; \quad \text{б)} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 14 \\ 3 & 12 & 21 \end{vmatrix}; \quad \text{в)} \begin{vmatrix} 32 & 8 & 0 \\ 2 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix};$$

$$19) \quad \text{a)} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \\ 5 & 7 & 0 & 5 \\ 9 & 4 & 0 & 7 \end{vmatrix}; \quad \text{б)} \begin{vmatrix} 18 & 4 & 6 \\ 9 & 5 & 3 \\ 15 & 12 & 5 \end{vmatrix}; \quad \text{в)} \begin{vmatrix} 5 & 10 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \\ 6 & 10 & 2 \end{vmatrix};$$

$$20) \quad \text{a)} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & 7 \\ 5 & 1 & 0 & 1 \\ 8 & 4 & 0 & 9 \end{vmatrix}; \quad \text{б)} \begin{vmatrix} 1 & 8 & 6 \\ 2 & 16 & 3 \\ 3 & 24 & 5 \end{vmatrix}; \quad \text{в)} \begin{vmatrix} 48 & 12 & 0 \\ 2 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix};$$

$$21) \quad \text{a)} \begin{vmatrix} 1 & 9 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 0 \\ 5 & 7 & 12 & 0 \\ 9 & 4 & 15 & 0 \end{vmatrix}; \quad \text{б)} \begin{vmatrix} 24 & 4 & 6 \\ 48 & 8 & 3 \\ 72 & 12 & 5 \end{vmatrix}; \quad \text{в)} \begin{vmatrix} 48 & 12 & 0 \\ 2 & 4 & 7 \\ 6 & 2 & 1 \end{vmatrix};$$

$$22) \quad \text{a)} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 0 & 3 \\ 5 & 7 & 0 & 4 \\ 9 & 4 & 0 & 2 \end{vmatrix}; \quad \text{б)} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 32 \\ 7 & 8 & 64 \\ 3 & 12 & 84 \end{vmatrix}; \quad \text{в)} \begin{vmatrix} 32 & 16 & 0 \\ 1 & 4 & 7 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix};$$

$$23) \quad \text{a)} \begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 6 & 3 \\ 0 & 7 & 8 & 3 \\ 0 & 4 & 5 & 8 \end{vmatrix}; \quad \text{б)} \begin{vmatrix} 1 & 9 & 6 \\ 2 & 18 & 3 \\ 3 & 27 & 5 \end{vmatrix}; \quad \text{в)} \begin{vmatrix} 8 & 16 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \\ 6 & 10 & 2 \end{vmatrix};$$

$$24) \quad \text{a)} \begin{vmatrix} 1 & 7 & 4 & 0 \\ 7 & 6 & 3 & 0 \\ 5 & 7 & 8 & 0 \\ 9 & 7 & 5 & 0 \end{vmatrix}; \quad \text{б)} \begin{vmatrix} 1 & 7 & 6 \\ 2 & 14 & 3 \\ 3 & 21 & 5 \end{vmatrix}; \quad \text{в)} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 7 \\ 8 & 5 & 2 \end{vmatrix};$$

$$25) \quad \text{a)} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 0 & 6 \\ 5 & 7 & 0 & 2 \\ 9 & 4 & 0 & 70 \end{vmatrix}; \quad \text{б)} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 6 & 3 \\ 3 & 9 & 5 \end{vmatrix}; \quad \text{в)} \begin{vmatrix} 14 & 7 & 0 \\ 1 & 4 & 7 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix};$$

$$26) \quad \text{a)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 6 & 8 \\ 5 & 0 & 7 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 7 \end{vmatrix}; \quad \text{б)} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 5 & 20 & 3 \\ 3 & 12 & 5 \end{vmatrix}; \quad \text{в)} \begin{vmatrix} 30 & 15 & 0 \\ 1 & 4 & 7 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix};$$

$$27) \quad \text{a)} \begin{vmatrix} 4 & 3 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 6 & 0 \\ 5 & 1 & 8 & 0 \\ 9 & 2 & 5 & 0 \end{vmatrix}; \quad \text{б)} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 2 & 3 & 18 \\ 3 & 12 & 27 \end{vmatrix}; \quad \text{в)} \begin{vmatrix} 4 & 8 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \\ 6 & 10 & 2 \end{vmatrix};$$

$$28) \quad \text{a)} \begin{vmatrix} 0 & 3 & 3 & 7 \\ 0 & 4 & 6 & 1 \\ 0 & 7 & 8 & 3 \\ 0 & 4 & 5 & 40 \end{vmatrix}; \quad \text{б)} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 8 & 24 & 3 \\ 5 & 15 & 5 \end{vmatrix}; \quad \text{в)} \begin{vmatrix} 28 & 14 & 0 \\ 1 & 4 & 7 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix};$$

$$29) \quad \text{a)} \begin{vmatrix} 4 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & 7 & 6 & 0 \\ 5 & 7 & 2 & 0 \\ 9 & 2 & 5 & 0 \end{vmatrix}; \quad \text{б)} \begin{vmatrix} 1 & 7 & 6 \\ 6 & 42 & 3 \\ 7 & 49 & 5 \end{vmatrix}; \quad \text{в)} \begin{vmatrix} 18 & 9 & 0 \\ 1 & 4 & 7 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix};$$

$$30) \quad \text{a)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 & 4 \\ 3 & 0 & 6 & 6 \\ 5 & 0 & 8 & 7 \\ 9 & 0 & 5 & 3 \end{vmatrix}; \quad \text{б)} \begin{vmatrix} 1 & 6 & 6 \\ 4 & 24 & 3 \\ 7 & 42 & 5 \end{vmatrix}; \quad \text{в)} \begin{vmatrix} 8 & 16 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \\ 6 & 10 & 2 \end{vmatrix}.$$

Завдання 6. Обчислити визначник, розклавши його за елементами деякого стовпчика чи рядка:

$$1) \quad \text{a)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}; \quad \text{б)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}; \quad 2) \quad \text{a)} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 5 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}; \quad \text{б)} \begin{vmatrix} 3 & 0 & 5 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 7 & 1 \\ 5 & 6 & 2 & 4 \end{vmatrix};$$

$$3) \quad \text{a)} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 0 & 5 & 1 \\ 7 & 0 & 9 \end{vmatrix}; \quad \text{б)} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 2 & 1 \\ 4 & 8 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & 9 & 1 \end{vmatrix}; \quad 4) \quad \text{a)} \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & 6 & 1 \\ 7 & 0 & 9 \end{vmatrix}; \quad \text{б)} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 4 & 1 \\ 4 & 9 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & 6 & 1 \end{vmatrix};$$

$$5) \quad \text{a)} \begin{vmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}; \quad \text{б)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}; \quad 6) \quad \text{a)} \begin{vmatrix} 0 & 8 & 7 \\ 5 & -2 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}; \quad \text{б)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 7 & 1 \\ 5 & 6 & 2 & 4 \end{vmatrix};$$

$$7) \quad \text{a)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 7 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}; \quad \text{б)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & -2 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & 6 & 7 \end{vmatrix}; \quad 8) \quad \text{a)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 6 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}; \quad \text{б)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & -2 & 5 & 0 \\ 5 & 2 & 7 & 1 \end{vmatrix};$$

$$9) \quad \text{a)} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{vmatrix}; \quad \text{б)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 & 4 \\ 0 & 2 & 6 & 3 \\ 7 & -2 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 7 & 1 \end{vmatrix}; \quad 10) \quad \text{a)} \begin{vmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix}; \quad \text{б)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{vmatrix};$$

$$11) \quad \text{a)} \begin{vmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 3 \end{vmatrix}; \quad \text{б)} \begin{vmatrix} 1 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 7 & 1 \\ 4 & -2 & 2 & 0 \\ 6 & 8 & 5 & 1 \end{vmatrix}; \quad 12) \quad \text{a)} \begin{vmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 7 & 3 \end{vmatrix}; \quad \text{б)} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & -2 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix};$$

$$13) \quad \text{a)} \begin{vmatrix} 8 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & 3 \end{vmatrix}; \quad \text{б)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 3 \\ 4 & -2 & 7 & 0 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}; \quad 14) \quad \text{a)} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 9 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix}; \quad \text{б)} \begin{vmatrix} 3 & 0 & 5 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 2 & 4 \end{vmatrix};$$

$$15) \quad \text{a)} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 5 \\ 4 & 0 & 9 \end{vmatrix}; \quad \text{б)} \begin{vmatrix} 3 & 0 & 6 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 8 & 8 \\ 5 & 7 & 2 & 1 \end{vmatrix}; \quad 16) \quad \text{a)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & 5 \\ 4 & 3 & 7 \end{vmatrix}; \quad \text{б)} \begin{vmatrix} 3 & 0 & 5 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 9 & 1 \end{vmatrix};$$

$$17) \text{ а) } \begin{vmatrix} 1 & 8 & 3 \\ 0 & -2 & 5 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 3 & 0 & 8 & 1 \\ 3 & 9 & 1 & 0 \\ 4 & -7 & 7 & 1 \\ 5 & 6 & 2 & 4 \end{vmatrix};$$

$$18) \text{ а) } \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 3 & 0 & 6 & 1 \\ 3 & 8 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & 2 & 9 \end{vmatrix};$$

$$19) \text{ а) } \begin{vmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 5 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & 3 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 3 & 5 & 5 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 8 & 1 \\ 5 & 9 & 2 & 4 \end{vmatrix};$$

$$20) \text{ а) } \begin{vmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 7 & -2 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 3 & 0 & 7 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 9 & 4 \\ 5 & 2 & 2 & 7 \end{vmatrix};$$

$$21) \text{ а) } \begin{vmatrix} 0 & 3 & 7 \\ 6 & -2 & 0 \\ 4 & 5 & 5 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 9 & 0 & 5 & 1 \\ 8 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 7 & 1 \\ 5 & 3 & 2 & 4 \end{vmatrix};$$

$$22) \text{ а) } \begin{vmatrix} 1 & 13 & 2 \\ 0 & -12 & 5 \\ 4 & 15 & 0 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 3 & 0 & 5 & 2 \\ 3 & 5 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & 7 & 2 \\ 5 & 6 & 2 & 4 \end{vmatrix};$$

$$23) \text{ а) } \begin{vmatrix} 1 & 11 & 0 \\ 0 & -22 & 5 \\ 4 & 15 & 3 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 9 & 0 & 5 & 1 \\ 4 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 7 & 5 \\ 5 & 6 & 2 & 4 \end{vmatrix};$$

$$24) \text{ а) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 0 & -1 & 12 \\ 4 & 5 & 11 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 2 & 4 \end{vmatrix};$$

$$25) \text{ а) } \begin{vmatrix} 7 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & 5 \\ 4 & 5 & 0 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 2 & 4 \end{vmatrix};$$

$$26) \text{ а) } \begin{vmatrix} 1 & 13 & 0 \\ 0 & -15 & 1 \\ 4 & 12 & 2 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 3 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 9 \\ 4 & -1 & 0 & 1 \\ 5 & 6 & 2 & 1 \end{vmatrix};$$

$$27) \text{ а) } \begin{vmatrix} 1 & 9 & 0 \\ 0 & -2 & 7 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 3 & 0 & 5 & 2 \\ 3 & 5 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 3 & 1 \\ 5 & 9 & 2 & 4 \end{vmatrix};$$

$$28) \text{ а) } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 10 \\ 0 & -2 & 15 \\ 4 & 5 & 13 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 0 & 4 \end{vmatrix};$$

$$29) \text{ а) } \begin{vmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 0 & -2 & 9 \\ 4 & 9 & 3 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 4 & 0 & 5 & 1 \\ 7 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 7 & 1 \\ 5 & 9 & 2 & 4 \end{vmatrix};$$

$$30) \text{ а) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Завдання 7. Помножити матриці:

$$1) \text{ а) } \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 & 4 \\ 2 & 1 & -3 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 3 & -2 \\ 6 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix};$$

$$\text{б) } \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -8 & 1 & -2 \\ -3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix};$$

$$\text{в)} (5 \ 2 \ 4) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -2 & 5 & -1 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix};$$

$$\text{г)} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 1 \\ 3 & 5 \\ 6 & 8 \\ 8 & 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 9 & 6 & -1 \\ 2 & 8 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

2)

$$\text{а)} \begin{pmatrix} 3 & 8 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 7 & 8 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix};$$

$$\text{б)} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{в)} (4 \ 0 \ -2) \begin{pmatrix} 8 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 8 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix};$$

$$\text{г)} \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 0 & 2 \\ -3 & 4 \\ 6 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 & 0 \\ 5 & 6 & -7 & 8 \end{pmatrix};$$

3)

$$\text{а)} \begin{pmatrix} 5 & 4 & 6 & 0 \\ -2 & 3 & 8 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 6 \\ -2 & 0 \\ 1 & 8 \end{pmatrix};$$

$$\text{б)} \begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 3 & - & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix};$$

$$\text{в)} (5 \ 9 \ 4) \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 5 \\ 6 & 8 & -7 \end{pmatrix};$$

$$\text{г)} \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 0 & 2 \\ 4 & - \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 & 6 & -1 \\ 5 & -6 & -3 & 9 \end{pmatrix};$$

4)

$$\text{а)} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 8 & 7 \\ -6 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix};$$

$$\text{б)} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 & 6 \\ 8 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\text{в)} (5 \ 4 \ -3) \begin{pmatrix} 0 & 5 & 8 \\ -2 & 8 & -6 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\text{г)} \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 4 & 0 \\ 3 & 2 \\ 1 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 9 & 8 & -6 \\ 3 & -2 & 0 & -7 \end{pmatrix};$$

5)

$$\text{а)} \begin{pmatrix} 8 & 5 & -9 & 4 \\ 3 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 8 & 7 \\ 3 & 5 \\ 4 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\text{б)} \begin{pmatrix} 8 & 0 & 3 \\ -1 & 5 & -2 \\ -3 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix};$$

$$\text{в)} (5 \ 9 \ 4) \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 0 & -2 & \\ \hline 5 & 1 & 0 & \end{array} \right);$$

$$\text{г)} \left(\begin{array}{cc|c} -4 & 6 & \\ \hline -2 & 8 & \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 5 & 6 & 8 \end{array} \right);$$

$$6) \text{ а)} \left(\begin{array}{cccc|cc} 6 & 0 & -2 & -5 & 5 & 9 \\ \hline 4 & 3 & -2 & 6 & 1 & 0 \\ \hline & & & & 2 & -3 \\ & & & & 4 & 9 \end{array} \right);$$

$$\text{б)} \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 0 & 7 & 5 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 0 \\ \hline 5 & 4 & 3 & 9 \end{array} \right);$$

$$\text{в)} (4 \ 9 \ 8) \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 6 & 4 & \\ \hline 3 & 2 & 0 & \\ \hline 1 & 8 & 6 & \end{array} \right);$$

$$\text{г)} \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 0 & \\ \hline 2 & 9 & \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 5 & 8 \\ \hline 3 & 5 & 8 & 0 \\ \hline 7 & 5 & & \\ \hline 3 & 0 & 9 & 3 \end{array} \right);$$

$$7) \text{ а)} \left(\begin{array}{cccc|cc} 4 & 0 & 5 & 9 & 5 & 8 \\ \hline 3 & 9 & 6 & 2 & 6 & 7 \\ \hline & & & & 4 & 3 \end{array} \right);$$

$$\text{б)} \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 7 & 4 & 5 \\ \hline 5 & 2 & 0 & 8 \end{array} \right);$$

$$\text{в)} (5 \ 8 \ 4) \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 9 & 5 & \\ \hline 2 & 0 & 1 & \\ \hline 7 & 8 & 4 & \end{array} \right);$$

$$\text{г)} \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 9 & \\ \hline 1 & 2 & \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 9 & 0 & 5 \\ \hline 0 & 9 & 4 & 5 & 2 & 0 \\ \hline 5 & 8 & & \\ \hline 8 & 0 & -3 & 4 \end{array} \right);$$

$$8) \text{ а)} \left(\begin{array}{cccc|cc} 5 & 9 & 4 & 0 & 4 & 9 \\ \hline 4 & 3 & 6 & 8 & 0 & 1 \\ \hline & & & & 2 & 5 \end{array} \right);$$

$$\text{б)} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 6 & -8 & 0 \\ \hline 5 & 4 & 3 & 8 \end{array} \right);$$

$$\text{в)} (4 \ 8 \ 3) \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 2 & \\ \hline 3 & 5 & 8 & \\ \hline 1 & 9 & 0 & \end{array} \right);$$

$$\text{г)} \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 9 & \\ \hline 2 & 3 & \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 3 & 0 & 2 \\ \hline 3 & 5 & 3 & 1 \\ \hline 1 & 5 & & \\ \hline 2 & 3 & 1 & 2 \end{array} \right);$$

$$9) \text{ а)} \left(\begin{array}{cccc|cc} 7 & 2 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ \hline 4 & 3 & 2 & 5 & 0 & 3 \\ \hline & & & & 4 & 2 \end{array} \right);$$

$$\text{б)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 7 \\ \hline 2 & 3 & 1 & 3 \end{array} \right);$$

$$\text{в)} (3 \ 2 \ 4) \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 8 & 9 \end{pmatrix};$$

$$\text{г)} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 0 \\ 7 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 7 & 2 & 2 \\ 8 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix};$$

$$10) \text{ а)} \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 & 4 \\ 2 & -7 & -8 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 1 & 0 \\ 2 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix};$$

$$\text{б)} \begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \\ 8 & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix};$$

$$\text{в)} (1 \ 5 \ 8) \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix};$$

$$\text{г)} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 4 \\ 1 & 7 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 & 0 \\ 3 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix};$$

$$11) \text{ а)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 4 & 3 & -2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & -3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix};$$

$$\text{б)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix};$$

$$\text{в)} (6 \ -7 \ 8) \begin{pmatrix} 9 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 6 \end{pmatrix};$$

$$\text{г)} \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 2 & - \\ 1 & 5 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 6 & -7 & 0 \\ 8 & 2 & -7 & 0 \end{pmatrix};$$

$$12) \text{ а)} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & -5 \\ 4 & 3 & -6 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & -3 \\ 6 & 7 \end{pmatrix};$$

$$\text{б)} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 1 & 2 & 8 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix};$$

$$\text{в)} (7 \ 9 \ -4) \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \\ 6 & 9 & 6 \end{pmatrix};$$

$$\text{г)} \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ -6 & 4 \\ 3 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 7 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix};$$

$$13) \text{ а)} \begin{pmatrix} 7 & 8 & -3 & 0 \\ 9 & 5 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 3 & 2 \\ 4 & 8 \\ 5 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{б)} \begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix};$$

$$\text{в)} (6 \ 3 \ -2) \begin{pmatrix} 9 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 6 & 7 & 4 \end{pmatrix};$$

$$\text{г)} \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 8 & -2 \\ -9 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 8 & 6 & 4 \\ 3 & 2 & 0 & 5 \end{pmatrix};$$

14)

$$\text{а)} \begin{pmatrix} 4 & -3 & 5 & 1 \\ 6 & -9 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \\ 3 & 7 \\ 4 & 5 \end{pmatrix};$$

$$\text{б)} \begin{pmatrix} 8 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix};$$

$$\text{в)} (5 \ -2 \ 1) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 7 & 8 \\ 4 & 6 & 5 \end{pmatrix};$$

$$\text{г)} \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 0 \\ 9 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 4 & 3 & 0 \\ 9 & 7 & 2 & 1 \end{pmatrix};$$

15)

$$\text{а)} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & -5 \\ 9 & 3 & 7 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \\ 2 & 7 \\ 9 & 3 \end{pmatrix};$$

$$\text{б)} \begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 3 & 4 & 0 \\ 8 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{в)} (7 \ 9 \ -3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 4 & 8 & 6 \end{pmatrix};$$

$$\text{г)} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -9 & 1 \\ 4 & 0 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 7 & 2 & 0 \end{pmatrix};$$

16)

$$\text{а)} \begin{pmatrix} 6 & -7 & 9 & 0 \\ 3 & -1 & 5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 4 \\ 2 & 6 \\ 4 & 3 \end{pmatrix};$$

$$\text{б)} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 3 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix};$$

$$\text{в)} (6 \ -5 \ 1) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 9 \\ 8 & 5 & 7 \end{pmatrix};$$

$$\text{г)} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -6 & 4 \\ 7 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 6 & 5 & 3 \\ 1 & 9 & 7 & 2 \end{pmatrix};$$

17)

$$\text{а)} \begin{pmatrix} 10 & 4 & 5 & 3 \\ -7 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 7 & 2 \\ 6 & 3 \\ 8 & 4 \end{pmatrix};$$

$$\text{б)} \begin{pmatrix} 7 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix};$$

$$\text{в)} (1 \ 3 \ -5) \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 2 \\ 5 & 8 & 7 \end{pmatrix};$$

$$\text{г)} \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 9 & 5 \\ -4 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 4 & 7 & 6 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

18)

$$\text{а)} \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 9 & 0 \\ 0 & -3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix};$$

$$\text{б)} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 8 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\text{в)} (8 \ 0 \ -1) \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 6 & 8 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\text{г)} \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 9 & 0 \\ -4 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 4 & 0 & -3 \\ 1 & 5 & 2 & -6 \end{pmatrix};$$

19)

$$\text{а)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 & -3 \\ 2 & 4 & 6 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 4 & 1 \\ 2 & -5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix};$$

$$\text{б)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\text{в)} (4 \ 8 \ -5) \begin{pmatrix} 9 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 8 \\ 6 & 4 & 5 \end{pmatrix};$$

$$\text{г)} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \\ 0 & 8 \\ -6 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 8 & 9 \\ 7 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix};$$

20)

$$\text{а)} \begin{pmatrix} 9 & 8 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 8 \end{pmatrix};$$

$$\text{б)} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{в)} (5 \ 1 \ 2) \begin{pmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \end{pmatrix};$$

$$\text{г)} \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 0 \\ -1 & 3 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 5 \\ 7 & 1 & 4 & 6 \end{pmatrix};$$

21)

$$\text{а)} \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \\ 4 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix};$$

$$\text{б)} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 0 & 3 & 6 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix};$$

$$\text{в)} (5 \ 1 \ 4) \begin{pmatrix} 0 & 8 & 6 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix};$$

$$\text{г)} \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 0 & -5 \\ 2 & -1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 5 & 1 & 3 \\ -4 & 2 & 0 & 7 \end{pmatrix};$$

22)

$$\text{а)} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 8 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 4 \\ 0 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix};$$

$$\text{б)} \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 8 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix};$$

$$\text{в)} (1 \ 4 \ 8) \begin{pmatrix} 1 & 8 & 7 \\ 1 & 6 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix};$$

$$\text{г)} \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 1 & 8 \\ 4 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 8 \\ 2 & 2 & 5 & 6 \end{pmatrix};$$

23)

$$\text{а)} \begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 & 1 \\ 5 & 9 & 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 8 \\ 9 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix};$$

$$\text{б)} \begin{pmatrix} 8 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix};$$

$$\text{в)} (5 \ 2 \ 3) \begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix};$$

$$\text{г)} \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 0 & 7 \\ 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 6 & 3 \\ 5 & 8 & 1 & 2 \end{pmatrix};$$

24)

$$\text{а)} \begin{pmatrix} 4 & 8 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & -3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 9 & 5 \\ 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{б)} \begin{pmatrix} 6 & 9 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix};$$

$$\text{в)} (2 \ 6 \ 9) \begin{pmatrix} 0 & 8 & 3 \\ 1 & 6 & 5 \\ 7 & 2 & 4 \end{pmatrix};$$

$$\text{г)} \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 4 & 8 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix};$$

25)

$$\text{а)} \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 3 & 1 \\ 5 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix};$$

$$\text{б)} \begin{pmatrix} 1 & 9 & 5 \\ 4 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix};$$

$$\text{B)} (2 \ 6 \ 8) \begin{pmatrix} 3 & 6 & 4 \\ 2 & 0 \\ 9 & 8 & 5 \end{pmatrix};$$

$$\text{Г)} \begin{pmatrix} 8 & 9 \\ -2 & 9 \\ 5 & 0 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 9 & 5 & 6 \\ 5 & 0 & 8 & 8 \end{pmatrix};$$

26)

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 7 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix};$$

$$\text{б)} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 6 \\ 9 & 7 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\text{B)} (8 \ 1 \ 0) \begin{pmatrix} 6 & 4 & 3 \\ 5 & 2 & 0 \\ 1 & 9 & 6 \end{pmatrix};$$

$$\text{Г)} \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 5 & 9 \\ 1 & 5 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 & 1 & 8 \\ 3 & 0 & 8 & 4 \end{pmatrix};$$

27)

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix};$$

$$\text{б)} \begin{pmatrix} 1 & 9 & 2 \\ 4 & 6 & 5 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix};$$

$$\text{B)} (2 \ 8 \ 6) \begin{pmatrix} 3 & 6 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 9 & 7 & 6 \end{pmatrix};$$

$$\text{Г)} \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 6 & 4 \\ 5 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 9 & 4 & 6 \\ 5 & 0 & 1 & 8 \end{pmatrix};$$

28)

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & -3 \\ 2 & 4 & 6 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 4 & 1 \\ 2 & -5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix};$$

$$\text{б)} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix};$$

$$\text{B)} (6 \ -5 \ 1) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 0 \\ 8 & 5 & 6 \end{pmatrix};$$

$$\text{Г)} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -2 & 9 \\ 3 & 8 \\ 7 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 8 & 9 \\ 3 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix};$$

29)

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 1 \\ 5 & 9 & -4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \\ 2 & 7 \\ 4 & 5 \end{pmatrix};$$

$$\text{б)} \begin{pmatrix} 8 & 4 & 5 \\ 1 & 7 & 3 \\ 5 & 6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix};$$

$$\text{в) } (4 \ 2 \ 1) \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 3 & 7 & 0 \\ 1 & 6 & 5 \end{pmatrix};$$

$$\text{г) } \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -3 & 7 \\ 9 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 & 8 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix};$$

30)

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 & -5 \\ 3 & 7 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 4 \\ 2 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix};$$

$$\text{б) } \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix};$$

$$\text{в) } (1 \ 5 \ 8) \begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & 9 & 6 \end{pmatrix};$$

$$\text{г) } \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 4 \\ 3 & 7 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 & 0 \\ 3 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Завдання 8. Розв'язати систему рівнянь в матричній формі:

$$1) \begin{cases} 2x - y + 3z = 1, \\ x - 2y - 5z = -9, \\ 4x + 3y - 2z = 4; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 3x - 3y + 2z = -4, \\ 2x + y - 3z = -1, \\ x - 2y + 5z = 1; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x - 4y + 2z = -5, \\ 4x + y - 3z = -3, \\ 2x + 3y + 4z = 1; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 2x + 3y + z = 1, \\ x + y - 4z = 0, \\ 4x + 5y - 3z = 1; \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} 4x - y + 3z = 1, \\ 3x + 2y + 4z = 8, \\ 2x - 2y + 4z = 0; \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} 3x - y + 4z = 2, \\ x + 2y + 3z = 7, \\ 5x + 3y + 2z = 8; \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} 2 + 4y - 3z = 2, \\ x + y + 2z = 0, \\ 3x - 2y + z = -5; \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} 3x - 2y - z = -5, \\ x + 3y + 2z = 2, \\ 5x - 2y + 4z = -7; \end{cases}$$

$$9) \begin{cases} x + y + -3z = 0, \\ 3x + 2y + 2z = -1, \\ x - y + 5z = -2; \end{cases}$$

$$10) \begin{cases} 2x - y + 3z = 1, \\ x - 2y - 5z = -9, \\ 4x + 3y - 2z = 4; \end{cases}$$

$$11) \begin{cases} 3x - 3y + 2z = -4, \\ 2x + y - 3z = -1, \\ x - 2y + 5z = 1; \end{cases}$$

$$12) \begin{cases} x + 2y - 3z = 1, \\ 2x - 3y - z = -7, \\ 4x + y - 2z = 0; \end{cases}$$

$$13) \begin{cases} x - 4y + 2z = -5, \\ 4x + y - 3z = -3, \\ 2x + 3y + 4z = 1; \end{cases}$$

$$15) \begin{cases} 4x - y + 3z = 1, \\ 3x + 2y + 4z = 8, \\ 2x - 2y + 4z = 0; \end{cases}$$

$$17) \begin{cases} 2x + 4y - 3z = 2, \\ x + y + 2z = 0, \\ 3x - 2y + z = -5; \end{cases}$$

$$19) \begin{cases} x + y - 3z = 0, \\ 3x + 2y + 2z = -1, \\ x - y + 5z = -2; \end{cases}$$

$$21) \begin{cases} 3x - 3y + 2z = -4, \\ 2x + y - 3z = -1, \\ x - 2y + 5z = 1; \end{cases}$$

$$23) \begin{cases} x - 4y + 2z = -5, \\ 4x + y - 3z = -3, \\ 2x + 3y + 4z = 1; \end{cases}$$

$$25) \begin{cases} 4x - y + 3z = 1, \\ 3x + 2y + 4z = 8, \\ 2x - 2y + 4z = 0; \end{cases}$$

$$27) \begin{cases} 2x + 4y - 3z = 2, \\ x + y + 2z = 0, \\ 3x - 2y + z = -5; \end{cases}$$

$$29) \begin{cases} x + y - 3z = 0, \\ 3x + 2y + 2z = -1, \\ x - y + 5z = -2; \end{cases}$$

$$14) \begin{cases} 2x + 3y + z = 1, \\ x + y - 4z = 0, \\ 4x + 5y - 3z = 1; \end{cases}$$

$$16) \begin{cases} 3x - y + 4z = 2, \\ x + 2y + 3z = 7, \\ 5x + 3y + 2z = 8; \end{cases}$$

$$18) \begin{cases} 3x - 2y - z = -5, \\ x + 3y + 2z = 2, \\ 5x - 2y + 4z = -7; \end{cases}$$

$$20) \begin{cases} 2x - y + 3z = 1, \\ x - 2y - 5z = -9, \\ 4x + 3y - 2z = 4; \end{cases}$$

$$22) \begin{cases} x + 2y - 3z = 1, \\ 2x - 3y - z = -7, \\ 4x + y - 2z = 0; \end{cases}$$

$$24) \begin{cases} 2x + 3y + z = 1, \\ x + y - 4z = 0, \\ 4x + 5y - 3z = 1; \end{cases}$$

$$26) \begin{cases} 3x - y + 4z = 2, \\ x + 2y + 3z = 7, \\ 5x + 3y + 2z = 8; \end{cases}$$

$$28) \begin{cases} 3x - 2y - z = -5, \\ x + 3y + 2z = 2, \\ 5x - 2y + 4z = -7; \end{cases}$$

$$30) \begin{cases} 2x - y + 3z = 1, \\ x - 2y - 5z = -9, \\ 4x + 3y - 2z = 4. \end{cases}$$

§ 2. Елементи векторної алгебри

Приклад 1. Знайти скалярний добуток векторів.

а) $a(3; -2; 8)$ і $b(4; -5; 3)$; б) $c = -i + 9j - 7k$ і $d = 2i + j - 5k$.

Розв'язання. Скалярний добуток обчислимо за формулою (2.3).

а) $a \cdot b = 3 \cdot 4 + (-2) \cdot (-5) + 8 \cdot 3 = 12 + 10 + 24 = 46$.

б) $c \cdot d = c_x \cdot d_x + c_y \cdot d_y + c_z \cdot d_z$; $c \cdot d = (-1) \cdot 2 + 9 \cdot 1 + (-7) \cdot (-5) = -2 + 9 + 35 = 42$.

Приклад 2. Знайти з точністю до градусів кут A трикутника ABC , координати вершин якого $A(-1; -4; 0)$, $B(-2; -2; -2)$, $C(-3; -3; 2)$.

Розв'язання. Знаходимо кут A , як кут між векторами \overline{AB} і \overline{AC} .

$$\cos \angle A = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{|\overline{AB}| \cdot |\overline{AC}|}; \quad \overline{AB} = (-2 - (-1); -2 - (-4); -2 - 0) = (-1; 2; -2);$$

$$\overline{AC} = (-3 - (-1); -3 - (-4); 2 - 0) = (-2; 1; 2);$$

$$\cos \angle A = \frac{-1 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 + (-2) \cdot 2}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{0}{3 \cdot 3} = 0. \text{ Отже, } \angle A = \arccos 0 = 90^\circ.$$

Приклад 3. Довести, що вектори $a(1; 3; -4)$ і $b(4; 12; -16)$ колінеарні.

Розв'язання. Оскільки координати векторів

$$\frac{4}{1} = \frac{12}{3} = \frac{-16}{-4} \text{ пропорційні, то вони колінеарні.}$$

Приклад 4. Перевірити, чи компланарні вектори $a(4; 3; -1)$, $b(6; 5; -2)$ і $c(1; -2; -3)$.

Розв'язання. Перевіримо, чи виконується умова компланарності:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 6 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = -60 - 6 + 12 + 5 + 54 - 16 = -11 \neq 0.$$

Оскільки умова компланарності не виконується, то вектори некомпланарні

Завдання для самостійної роботи

Завдання 1. Дано координати точок A , B і C . Знайти координати і модулі векторів

$$a = \overline{AB} \text{ і } b = \overline{AC}.$$

- | | |
|---|---|
| 1) $A(-5; 0; 4)$, $B(-3; -2; 5)$, $C(-2; 0; 8)$; | 2) $A(3; 3; -8)$, $B(5; 1; -7)$, $C(6; 3; -4)$; |
| 3) $A(2; -8; -2)$, $B(7; -7; -2)$, $C(5; -3; 2)$; | 4) $A(-4; 6; 1)$, $B(-2; 4; 2)$, $C(-1; 6; 5)$; |
| 5) $A(-1; 2; -6)$, $B(1; 0; -5)$, $C(2; 2; -2)$; | 6) $A(5; -2; 3)$, $B(7; -4; 4)$, $C(8; -2; 7)$; |
| 7) $A(-2; -1; -2)$, $B(3; 0; -2)$, $C(1; 4; 2)$; | 8) $A(-6; 5; 2)$, $B(-4; 3; 3)$, $C(-3; 5; 6)$; |
| 9) $A(-8; 0; 4)$, $B(-6; -2; 5)$, $C(-5; 0; 8)$; | 10) $A(-2; 4; 7)$, $B(0; 2; 8)$, $C(1; 4; 11)$; |
| 11) $A(2; 1; -6)$, $B(4; -1; -5)$, $C(5; 1; -2)$; | 12) $A(4; 6; -3)$, $B(6; 4; -2)$, $C(7; 6; 1)$; |
| 13) $A(1; -4; 6)$, $B(3; -6; 7)$, $C(4; -4; 10)$; | 14) $A(-1; 7; -4)$, $B(1; 5; -3)$, $C(2; 7; 0)$; |
| 15) $A(7; -4; 1)$, $B(12; -3; 1)$, $C(10; 1; 5)$; | 16) $A(-3; 8; 2)$, $B(-1; 6; 3)$, $C(0; 8; 6)$; |
| 17) $A(-7; 1; -1)$, $B(-5; -1; 0)$, $C(-4; 1; 3)$; | 18) $A(6; -7; 0)$, $B(8; -9; 1)$, $C(9; -7; 4)$; |

- 19) $A(0; -3; 3)$, $B(5; -2; 3)$, $C(3; 2; 7)$; 20) $A(1; -7; 2)$, $B(4; -3; 1)$, $C(1; -2; 3)$;
 21) $A(6; -6; -1)$, $B(8; -8; 0)$, $C(9; -6; 3)$; 22) $A(0; -5; 7)$, $B(5; -8; 2)$, $C(6; -5; 2)$;
 23) $A(-8; 0; 4)$, $B(-6; -2; 5)$, $C(-5; 0; 8)$; 24) $A(3; -1; 2)$, $B(-3; 2; 2)$, $C(2; -2; 1)$;
 25) $A(7; -5; 1)$, $B(6; -9; 10)$, $C(4; -7; 8)$; 26) $A(4; 0; 2)$, $B(5; -4; 3)$, $C(8; -3; 3)$;
 27) $A(2; -1; 9)$, $B(3; -3; 3)$, $C(4; -8; 5)$; 28) $A(0; -5; 2)$, $B(4; -2; 0)$, $C(3; -5; 2)$;
 29) $A(7; -2; 0)$, $B(5; -5; 1)$, $C(4; -5; 7)$; 30) $A(3; -2; 1)$, $B(3; -4; 5)$, $C(6; -2; 3)$.

Завдання 2. Знайти скалярний добуток векторів.

- 1) а) $a(3; -4; 7)$ і $b(4; -5; -2)$;
 б) $d_1 = 3i + 2j + 5k$ і $d = 2i + 3j - 4k$;
 3) а) $a(-4; 9; -12)$ і $b(-10; -12; 4)$;
 б) $c = 4i - 7j + 10k$ і $d = 15i + j + 6k$;
 5) а) $a(5; -14; 8)$ і $b(4; -1; 2)$;
 б) $c = 5i - 4j + 9k$ і $d = -i - 4k$;
 7) а) $a(7; -7; 7)$ і $b(4; -6; 1)$;
 б) $c = 5i - 4j + 12k$ і $d = -4i - 9j$;
 9) а) $a(4; -5; -7)$ і $b(-8; 6; -2)$;
 б) $c = 5i - 5j + 8k$ і $d = -8i + 4j - 4k$;
 11) а) $a(7; -8; 7)$ і $b(-2; -6; -1)$;
 б) $c = 8j - 10k$ і $d = 25i + j + 2k$;
 13) а) $a(5; 8; -10)$ і $b(8; -2; -2)$;
 б) $c = 4i - 2j + 7k$ і $d = -8i + 3j + 5k$;
 15) а) $a(8; 6; -9)$ і $b(-5; -5; -8)$;
 б) $c = -7i - 4k$ і $d = -4i + 30j - 7k$;
 17) а) $a(8; -6; 2)$ і $b(4; -4; -10)$;
 б) $c = 6i - 3j - 8k$ і $d = -6i + 4k$;
 19) а) $a(6; -2; -4)$ і $b(2; -6; -5)$;
 б) $c = -3j - 50k$ і $d = 29i + 3j - 4k$;
 21) а) $a(-5; -4; -8)$ і $b(7; -6; -5)$;
 б) $c = 5i + 8j - 4k$ і $d = i + 4k$;
 23) а) $a(13; -2; 9)$ і $b(1; -5; -2)$;
 б) $c = -5i - 8j - 5k$ і $d = 2i - 3j + 6k$;
 2) а) $a(7; -5; -8)$ і $b(-7; -8; 4)$;
 б) $c = -2i - 41j + 3k$ і $d = 2i - 4j + 3k$;
 4) а) $a(-4; 5; -7)$ і $b(5; -7; 5)$;
 б) $c = i - 2j + 4k$ і $d = -i + 5j + 7k$;
 6) а) $a(4; -4; 7)$ і $b(-5; -8; -1)$;
 б) $c = i - 8j - 17k$ і $d = -4k$;
 8) а) $a(6; 6; -8)$ і $b(3; -7; -5)$;
 б) $c = 4i - 7j + 3k$ і $d = -2i - 4k$;
 10) а) $a(4; 4; 9)$ і $b(-5; -7; 10)$;
 б) $c = i - 5j + 12k$ і $d = 16i + 3j$;
 12) а) $a(-4; -4; -4)$ і $b(2; -15; -2)$;
 б) $c = 7i + 31j + 12k$ і $d = 5i - j + 5k$;
 14) а) $a(12; -3; 5)$ і $b(1; -8; -6)$;
 б) $c = 5i - 15j - 4k$ і $d = 10i - 3k$;
 16) а) $a(5; -1; 7)$ і $b(2; -3; -9)$;
 б) $c = -2i + 6j - 9k$ і $d = -2i - 9j$;
 18) а) $a(8; -5; 7)$ і $b(5; -12; -6)$;
 б) $c = 5i - 5j - 5k$ і $d = i - 7j - 40k$;
 20) а) $a(7; -3; 9)$ і $b(5; -6; -7)$;
 б) $c = 8i + 35j - 5k$ і $d = 2i + 9k$;
 22) а) $a(-6; -2; 8)$ і $b(5; -8; -1)$;
 б) $c = -11i + 3j + 6k$ і $d = 30j - 40k$;
 24) а) $a(9; -4; 6)$ і $b(7; -4; -6)$;
 б) $c = 2i - 4j$ і $d = 20i + 9j$;

- 25) а) $a(3;5;7)$ і $b(10;-5;-3)$;
 б) $c = -10i - 55k$ і $d = 2i + 37j$;
- 26) а) $a(7;-4;10)$ і $b(5;-8;-2)$;
 б) $c = 9i - 6j$ і $d = 2i - 15j$;
- 27) а) $a(5;-2;3)$ і $b(6;-2;-3)$;
 б) $c = i - 5j + k$ і $d = 21i + 3j + 4k$;
- 28) а) $a(4;-7;2)$ і $b(8;-5;-3)$;
 б) $c = 7i + 8j - 9k$ і $d = -30j - k$;
- 29) а) $a(-4;-8;-5)$ і $b(9;-1;-6)$;
 б) $c = 9i - 8j - 52k$ і $d = i + 3j$;
- 30) а) $a(-12;16;1)$ і $b(1;1;-3)$;
 б) $c = -2i + 8j$ і $d = 2i - 9j - 45k$.

Завдання 3. Знайти з точністю до градусів кути трикутника ABC

- | | |
|---|---|
| 1) A(3; 0; 1), B(4; -5; 1), C(2; -1; 5); | 2) A(5; -3; 2), B(-8; 4; 1), C(7; 6; -2); |
| 3) A(4; -6; 2), B(0; 7; -1), C(3; 8; 5); | 4) A(1; 3; -5), B(0; 4; 0), C(-8; 3; 6); |
| 5) A(3; 0; 2), B(4; -5; 1), C(2; -1; 5); | 6) A(7; 3; -1), B(-3; 1; 2), C(4; -2; 5); |
| 7) A(3; 0; 7), B(4; 6; -1), C(2; -3; 5); | 8) A(3; 0; -2), B(1; 2; 4), C(5; 0; 6); |
| 9) A(2; 0; 1), B(3; 4; -5), C(-1; 6; 2); | 10) A(4; 2; -1), B(3; 6; 3), C(-2; 0; 5); |
| 11) A(5; 3; -2), B(6; 4; 0), C(-3; 0; 2); | 12) A(2; -3; -1), B(-4; 6; 2), C(0; -2; 5); |
| 13) A(4; -2; 3), B(0; 6; 8), C(2; 1; 5); | 14) A(2; -5; 7), B(5; 4; -3), C(-1; 0; 5); |
| 15) A(3; 4; 8), B(-2; 0; -1), C(4; 5; 9); | 16) A(5; 3; 8), B(2; 0; 4), C(3; 6; 9); |
| 17) A(5; 2; -4), B(3; -3; 0), C(2; -4; 8); | 18) A(3; 1; 8), B(2; 0; 5), C(3; 6; 7); |
| 19) A(3; 6; -2), B(4; 5; -7), C(6; -5; -3); | 20) A(7; 3; -1), B(-3; 1; 2), C(4; -2; 5); |
| 21) A(3; 6; -9), B(5; 4; -2), C(0; -6; -4); | 22) A(-3; 8; 9), B(4; 8; 5), C(6; -7; -9); |
| 23) A(3; -8; 1), B(3; 5; 0), C(-2; 5; 1); | 24) A(5; -3; 2), B(-8; 4; 1), C(7; 6; -2); |
| 25) A(3; 1; 1), B(3; 2; 0), C(-2; 6; 4); | 26) A(4; 0; -2), B(1; -3; 0), C(2; -2; 7); |
| 27) A(6; -8; 4), B(5; 0; -3), C(1; 4; 2); | 28) A(8; 4; -6), B(3; -1; 0), C(7; 5; -2); |
| 29) A(5; -3; 2), B(4; 6; 0), C(7; -4; 1); | 30) A(6; -8; 4), B(5; 0; -3), C(1; 4; 2). |

Завдання 4. Знайти площу трикутника ABC.

- | | |
|---|--|
| 1) A(2; 7; -5); B(0; -1; -3); C(3; 3; -5). | 2) A(3; 0; 2); B(6; 2; 1); C(5; 7; -2). |
| 3) A(5; 8; -3); B(-2; 9; 3); C(0; -3; -4). | 4) A(6; 3; 4); B(3; 2; 5); C(1; -4; 2). |
| 5) A(-5; 6; -2); B(3; 8; 6); C(2; -4; 7). | 6) A(6; 0; -3); B(7; 1; 5); C(1; 0; 2). |
| 7) A(3; -2; 7); B(6; 5; -4); C(-1; 0; 3). | 8) A(7; 6; 0); B(8; 3; 1); C(2; 5; 4). |
| 9) A(6; 0; -7); B(2; -1; 3); C(5; -4; 7). | 10) A(-6; 2; 4); B(3; 0; 9); C(5; 7; 1). |
| 11) A(3; 6; -2); B(-5; 4; -3); C(0; 7; -9). | 12) A(7; 2; 1); B(9; 0; 8); C(4; -2; 5). |
| 13) A(2; 0; 1); B(-3; 1; 4); C(-4; 6; 3). | 14) A(-5; 6; 2); B(3; 8; 6); C(2; 4; 7). |
| 15) A(6; -2; 0); B(3; 1; -1); C(5; 4; 7). | 16) A(4; -5; 0); B(2; 3; 0); C(1; 5; 7). |
| 17) A(6; -1; 2); B(3; 4; -8); C(9; 1; -5). | 18) A(8; 0; 4); B(9; 3; -6); C(2; 0; 7). |
| 19) A(4; -2; 1); B(5; -1; 3); C(-9; 4; 6). | 20) A(1; 6; 3); B(0; -2; 7); C(3; 3; 0). |
| 21) A(6; 8; -7); B(2; -1; 3); C(5; -4; 7). | 22) A(1; 3; 0); B(6; 3; 1); C(2; 5; 1). |
| 23) A(3; -8; 7); B(5; 4; -1); C(0; -6; 9). | 24) A(-3; 2; 1); B(3; 0; 5); C(5; 2; 1). |
| 25) A(7; -3; 1); B(5; 0; 6); C(-8; 3; 4). | 26) A(2; -3; 1); B(1; 0; 3); C(4; 2; 1). |

27) $A(5; -3; 1); B(0; 6; -8); C(7; 5; -3).$

28) $A(7; 0; 4); B(6; 3; 5); C(2; 0; -3).$

29) $A(-2; 3; 4); B(0; -1; 5); C(1; 2; 7).$

30) $A(3; 2; 0); B(2; 3; -1); C(2; 1; 1).$

Завдання 5. Перевірити, чи компланарні вектори.

1) $a = 8i + 6j - 10k; b = 2i + 7j - 4k;$
 $c = 8i - 2j - 3k;$

2) $a = 4i - 2j + 5k; b = 6i + 2j - 3k;$
 $c = 8i + 4j - 2k;$

3) $a = 6i - 3j + 2k; b = 4i - 2j + 6k;$
 $c = 5i - j + k;$

4) $a = 5i - 2j + 3k; b = 7i + 5j - 2k;$
 $c = 2i + 5j - 5k;$

5) $a = 5i + 10j - 6k;$
 $b = -5i + 6j + 3k;$
 $c = 10i + 4j - 9k;$

6) $a = 11i + 3j + 7k; b = 4i - 3j + 10k;$
 $c = 7i + 6j - 3k;$

7) $a = 10i - 12j + 4k;$
 $b = 3i - 4j + 5k;$
 $c = 7i - 8j - k;$

8) $a = 11i + j + k; b = 4i + 3j - 3k;$
 $c = 7i - 2j + 4k;$

9) $a = 7i + 2j + 10k; b = 3i - 4j + k;$
 $c = 4i + 6j + 9k;$

10) $a = 10i + 10j + k; b = 4i + 3j - 2k;$
 $c = 6i + 7j + 3k;$

11) $a = 11i - j + 10k; b = 3i - 4j + 6k;$
 $c = 8i + 3j + 4k;$

12) $a = 7i + 2j + 10k; b = 3i - 4j + k;$
 $c = 4i + 6j + 9k;$

13) $a = 5i + 4j - 2k; b = 4i + 7j - 3k;$
 $c = i - 3j + k;$

14) $a = 8i + 3j + 12k; b = 10i - 3j + 9k;$
 $c = -2i - 6j + 3k;$

15) $a = 5i + 10j - 6k;$
 $b = -5i + 6j + 3k;$
 $c = 10i + 4j - 9k;$

16) $a = i + 3j + 2k; b = 3i + 2j - k;$
 $c = 2i - j - 3k;$

17) $a = 5i - 2j - 3k; b = 7i + 4j + 2k;$
 $c = 2i + 6j + 5k;$

18) $a = 3i - 2j + 5k; b = 7i - 3j + k;$
 $c = 4i - j - 4k;$

19) $a = 2i - 3j - k; b = i + 10j - 6k;$
 $c = -i - 2 + 13j - 5k;$

20) $a = 3i - 5j - 5k; b = 5i - j - 4k;$
 $c = 2i + 4j + k;$

21) $a = 5i - j + k; b = 7i + 3j - 4k;$
 $c = 2i + 4j - 5k;$

22) $a = 3i - 4j + 5k; b = 2i + 7j - 4k;$
 $c = 2i + 5j - 3k;$

23) $a = 5i + 2j + 3k; b = 7i + 2j - 9k;$
 $c = 8i - 5j - 3k;$

24) $a = 5i - 4j + 2k; b = 8i + 2j - 5k;$
 $c = 3i + 5j - 8k;$

25) $a = 4i - 2j + 5k; b = 3i + 3j + 2k;$
 $c = 8i - 6j + 3k;$

26) $a = 8i - 6j + 5k; b = 10i + 3j - 4k;$
 $c = 2i - 5j - 3k;$

27) $a = 9i - 7j + 2k; b = 5i + 3j - k;$
 $c = 4i - 2 + 7j + 3k;$

28) $a = 4i - 7j + 2k; b = 3i + 2j - 4k;$
 $c = 5i - j + 2k;$

$$29) \quad \begin{cases} a = 3i + 5j - 2k; \\ c = 2i + 4j - 7k; \end{cases} \quad b = 5i + 9j - 9k; \quad 30) \quad \begin{cases} a = 6i - 2j + 3k; \\ c = 2i + 5j - 5k. \end{cases} \quad b = 7i + 3j - 2k;$$

§ 3. Елементи аналітичної геометрії

Приклад 1. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точки A(-3; 5) і B(7; -2).

Розв'язання. Знайдемо рівняння прямої АВ, що проходить через дві точки:

$$\frac{x - (-3)}{7 - (-3)} = \frac{y - 5}{-2 - 5}, \quad \frac{x + 3}{10} = \frac{y - 5}{-7}, \quad \text{звідси маємо } 7x + 10y - 29 = 0.$$

Приклад 2. Знайти довжину висоти AD трикутника ABC, якщо відомо координати вершини A(2; 2) та рівняння сторони BC: $7x + 2y - 51 = 0$.

Розв'язання. Довжину висоти AD знайдемо як відстань від точки A(2; 2) до прямої

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

BC. У нашому випадку $A=7$; $B=2$; $C=-51$, і тоді

$$d = \frac{|7 \cdot 2 + 2 \cdot 2 - 51|}{\sqrt{7^2 + 2^2}} = \frac{|-33|}{\sqrt{53}} = \frac{33}{\sqrt{53}}. \quad \text{Отже, } AD = \frac{33}{\sqrt{53}}.$$

Приклад 3. Записати рівняння площини, яка проходить через три точки $M_1(1, 1, 1)$, $M_2(2, 3, 4)$, $M_3(4, 3, 1)$.

Розв'язання. Рівняння набирає вигляду:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z & -1 \\ 2-1 & 3-1 & 4-1 & -1 \\ 4-1 & 3-1 & 1-1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Розкривши визначник, дістанемо рівняння: $6x - 9y + 4z - 1 = 0$.

Приклад 4. Дано координати точок A(-2; -1; -2), B(3; 0; -2), C(1; 4; 2). Знайти рівняння площини, яка проходить через точку C перпендикулярно вектору \overline{AB} .

Розв'язання. Знайдемо координати вектора \overline{AB}

$$\overline{AB} = (3 + 2; 0 + 1; -2 + 2) = (5; 1; 0),$$

Рівняння площини, яка проходить через задану точку $M(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно вектору $\overline{N} = (A, B, C)$, має вигляд

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

В нашому випадку $\overline{N} = \overline{AB} = (5; 1; 0)$, $M = C(1; 4; 2)$. Тоді рівняння шуканої площини матиме вигляд $5(x - 1) + (y - 4) + 0(z - 2) = 0$; $5x + y - 9 = 0$.

Приклад 5. Записати рівняння площини, яка проходить через точки A(3; -1; 4) і B(3; 2; -1) перпендикулярно площині $x + y + 2z - 3 = 0$.

Розв'язання. Вектор $\overline{N}_1(1; 1; 2)$, перпендикулярний до заданої площини. Оскільки вектори $\overline{N}_1(1; 1; 2)$ і $\overline{AB}(1; 3; -5)$ паралельні шуканій площині, то їх векторний добуток

буде перпендикулярним до шуканої площини. Отже, в якості нормального вектора \vec{N} візьмемо $\vec{N} = \vec{AB} \times \vec{N}_1$.

$$\text{Тому } \vec{N} = \left\{ \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right\} \text{ або } \vec{N}(11; -7; -2).$$

Скористаємося рівнянням площини, що проходить через точку $A(2; -1; 4)$ перпендикулярно до вектора $\vec{N}(11; -7; -2)$.

$$11(x - 2) - 7(y + 1) - 2(z - 4) = 0 \text{ або } 11x - 7y - 2z - 21 = 0.$$

Приклад 6. Знайти рівняння площини, яка проходить через точку $M(-4; 3; -7)$ та паралельна до площини $6x - 5y + 4z - 15 = 0$.

Розв'язання. Оскільки шукана площина паралельна площині $6x - 5y + 4z - 15 = 0$, то в якості її нормального вектора візьмемо вектор нормаль $\vec{N}(6; -5; 4)$ даної площини. Тепер шукане рівняння площини, яка проходить через точку $M(-4; 3; -7)$ та перпендикулярна даному вектору \vec{N} , має вигляд

$$6(x + 4) - 5(y - 3) + 4(z + 7) = 0, \text{ або } 6x - 5y + 4z + 67 = 0.$$

Приклад 7. Знайти точку перетину прямої $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{-1}$

з площиною $3x - 2y + z - 3 = 0$.

Розв'язання. Перейдемо від канонічного рівняння прямої $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{-1} = t$ до параметричного: $x = -1 + 2t$, $y = 2 + t$, $z = 1 - t$. Підставимо значення x , y , z в рівняння площини, отримаємо

$$3(-1 + 2t) - 2(2 + t) + (1 - t) - 3 = 0, \quad t = 3.$$

Підставимо отримане значення t в параметричне рівняння прямої та знайдемо координати точки перетину: $x=5, y=5, z=-2$.

Завдання для самостійної роботи

Завдання 1. Дано координати вершин трикутника; а) записати рівняння сторін AB і BC ; б) записати рівняння висоти AD ; в) знайти довжину висоти AD ; г) знайти кут B .

- | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1) $A(-3; 0), B(9; 9), C(7; -5);$ | 2) $A(-9; -2), B(3; 7), C(1; -7);$ |
| 3) $A(-5; 2), B(7; -7), C(5; 7);$ | 4) $A(-7; 5), B(5; -4), C(3; 10);$ |
| 5) $A(-7; 1), B(5; -8), C(3; 6);$ | 6) $A(0; 3), B(12; -6), C(10; 8);$ |
| 7) $A(-8; 4), B(4; -5), C(2; 9);$ | 8) $A(-2; 2), B(10; -7), C(8; 7);$ |
| 9) $A(1; 2), B(13; -7), C(11; 7);$ | 10) $A(-4; 1), B(8; -8), C(6; 6);$ |
| 11) $A(-7; 1), B(-5; -2), C(3; 4);$ | 12) $A(-3; 3), B(9; -6), C(7; 8);$ |
| 13) $A(-5; 0), B(7; 9), C(5; -5);$ | 14) $A(-7; 2), B(5; 11), C(3; -3);$ |
| 15) $A(-5; -3), B(7; 6), C(5; -8);$ | 16) $A(-6; -2), B(6; 7), C(4; -7);$ |

- | | |
|-------------------------------------|--------------------------------------|
| 17) $A(-8; -4), B(4; 5), C(2; -9);$ | 18) $A(0; -1), B(12; 8), C(10; -6);$ |
| 19) $A(-6; 1), B(6; 10), C(4; -4);$ | 20) $A(-2; -4), B(10; 5), C(8; -9);$ |
| 21) $A(-3; 0), B(9; 9), C(7; -5);$ | 22) $A(-9; -2), B(3; 7), C(1; -7);$ |
| 23) $A(-5; 2), B(7; -7), C(5; 7);$ | 24) $A(-5; 0), B(7; 9), C(5; -5);$ |
| 25) $A(-5; -3), B(7; 6), C(5; -8);$ | 26) $A(-6; -2), B(6; 7), C(4; -7);$ |
| 27) $A(-8; -4), B(4; 5), C(2; -9);$ | 28) $A(0; -1), B(12; 8), C(10; -6);$ |
| 29) $A(-6; 1), B(6; 10), C(4; -4);$ | 30) $A(-2; -4), B(10; 5), C(8; -9).$ |

Завдання 2. Знайти рівняння площини, яка проходить через точки A, B, C .
Визначити відстань від початку координат до цієї площини.

- | | |
|---|---|
| 1) $A(7; -2; 5), B(4; 3; 0), C(6; -2; 1);$ | 2) $A(3; 7; 0), B(1; -5; 2), C(3; 4; -1);$ |
| 3) $A(7; -2; 1), B(3; -2; 1), C(1; 8; -3);$ | 4) $A(7; -2; 3), B(4; 1; 0), C(3; -2; 5);$ |
| 5) $A(8; -4; 0), B(1; 3; 6), C(-1; -2; 6);$ | 6) $A(3; -2; 1), B(5; -6; 0), C(-4; -2; 4);$ |
| 7) $A(3; -2; -5), B(-4; 2; -3), C(2; -2; 3);$ | 8) $A(-1; -2; 5), B(4; 5; 0), C(9; -8; 0);$ |
| 9) $A(7; -2; 5), B(8; -3; 4), C(9; 1; 6);$ | 10) $A(9; -2; -3), B(-5; 3; 10), C(0; -2; 1);$ |
| 11) $A(9; 3; 0), B(6; -2; -4), C(4; -5; -6);$ | 12) $A(9; -4; -2), B(8; -7; -6), C(-7; -3; 2);$ |
| 13) $A(4; -3; -2), B(5; -6; 8), C(7; 8; -9);$ | 14) $A(8; -7; 0), B(3; -5; -2), C(-1; 6; 4);$ |
| 15) $A(8; -4; 0), B(1; 5; -3), C(8; -3; 9);$ | 16) $A(9; -6; -7), B(-3; 2; -5), C(8; -7; 3);$ |
| 17) $A(6; 4; -3), B(3; -2; 4), C(3; -1; 4);$ | 18) $A(3; 0; -6), B(0; -2; -4), C(2; -6; -3);$ |
| 19) $A(6; -2; 8), B(4; -5; 0), C(3; -6; -1);$ | 20) $A(2; -3; 0), B(5; 4; -1), C(6; -2; -3);$ |
| 21) $A(4; -2; 6), B(7; 1; 0), C(5; 3; -4);$ | 22) $A(6; -2; -1), B(-3; 7; -2), C(4; -5; 6);$ |
| 23) $A(2; -3; 0), B(5; 4; -1), C(6; -2; -3);$ | 24) $A(9; -4; -2), B(8; -7; -6), C(-7; -3; 2);$ |
| 25) $A(-2; 7; 5), B(-6; -9; 4), C(4; 5; 8);$ | 26) $A(9; -7; 7), B(-3; -9; 6), C(7; -4; 5);$ |
| 27) $A(4; -3; -2), B(5; -6; 8), C(7; 8; -9);$ | 28) $A(7; -2; 3), B(5; 6; -2), C(0; 8; 4);$ |
| 29) $A(1; -2; -3), B(3; 1; -5), C(4; 2; -7);$ | 30) $A(0; -4; -2), B(1; -7; -6), C(-7; -3; 0).$ |

Завдання 3

- 1) Знайти рівняння площини, яка проходить через точку $M(4; -7; 3)$, паралельно до площини $2x-3y+z-1=0$.
- 2) Дано дві точки $M(4; 0; -6)$ і $P(5; -2; 3)$. Знайти рівняння площини, яка проходить через точку M , перпендикулярно до вектора $N = MP$.
- 3) Знайти рівняння площини, яка проходить через точку $M(3; -5; -2)$, паралельно до площини $4y+6z-21=0$.
- 4) Дано дві точки $M(7; -3; 2)$ і $P(4; -6; -2)$. Знайти рівняння площини, яка проходить через точку M , перпендикулярно до вектора $N = MP$.
- 5) Знайти рівняння площини, яка проходить через точку $M(-4; 0; -2)$, паралельно до площини $7x-8y+15=0$.
- 6) Дано дві точки $M(3; -1; -5)$ і $P(0; 3; -4)$. Знайти рівняння площини, яка проходить через точку M , перпендикулярно до вектора $N = MP$.

- 7) Знайти рівняння площини, яка проходить через точку $M(0; -3; -2)$, паралельно до площини $-5x-2y-3z+14=0$.
- 8) Дано дві точки $M(-1; -1; 3)$ і $P(-4; 0; -3)$. Знайти рівняння площини, яка проходить через точку M , перпендикулярно до вектора $N = MP$.
- 9) Знайти рівняння площини, яка проходить через точку $M(6; 2; -3)$, паралельно до площини $5x-3z+32=0$.
- 10) Дано дві точки $M(4; -6; -7)$ і $P(4; -2; 5)$. Знайти рівняння площини, яка проходить через точку M , перпендикулярно до вектора $N = MP$.
- 11) Знайти рівняння площини, яка проходить через точку $M(-7; 4; -2)$, паралельно до площини $-3x-y-19=0$.
- 12) Дано дві точки $M(-2; -8; -4)$ і $P(5; -2; 1)$. Знайти рівняння площини, яка проходить через точку M , перпендикулярно до вектора $N = MP$.
- 13) Знайти рівняння площини, яка проходить через точку $M(6; 0; -2)$, паралельно до площини $2x+2y-3z-23=0$.
- 14) Дано дві точки $M(0; -1; 3)$ і $P(1; 3; 5)$. Знайти рівняння площини, яка проходить через точку M , перпендикулярно до вектора $N = MP$.
- 15) Знайти рівняння площини, яка проходить через точку $M(1; 1; -1)$, паралельно до площини $-5x-4y-3z-2=0$.
- 16) Дано дві точки $M(0; -8; 3)$ і $P(-5; -6; 0)$. Знайти рівняння площини, яка проходить через точку M , перпендикулярно до вектора $N = MP$.
- 17) Знайти рівняння площини, яка проходить через точку $M(5; 7; -2)$, паралельно до площини $-5x-7y-2z-47=0$.
- 18) Дано дві точки $M(0; 4; -3)$ і $P(5; -3; -3)$. Знайти рівняння площини, яка проходить через точку M , перпендикулярно до вектора $N = MP$.
- 19) Знайти рівняння площини, яка проходить через точку $M(1; 2; -3)$, паралельно до площини $-6x+4y-z+7=0$.
- 20) Дано дві точки $M(-4; -1; 7)$ і $P(-2; -3; 0)$. Знайти рівняння площини, яка проходить через точку M , перпендикулярно до вектора $N = MP$.
- 21) Знайти рівняння площини, яка проходить через точку $M(3; 4; -5)$, паралельно до площини $2x-2y+3z+5=0$.
- 22) Дано дві точки $M(3; -1; -4)$ і $P(2; -3; 4)$. Знайти рівняння площини, яка проходить через точку M , перпендикулярно до вектора $N = MP$.
- 23) Знайти рівняння площини, яка проходить через точку $M(3; 1; -2)$, паралельно до площини $5x-6y+z=0$.
- 24) Дано дві точки $M(0; -1; 3)$ і $P(1; 3; 5)$. Знайти рівняння площини, яка проходить через точку M , перпендикулярно до вектора $N = MP$.
- 25) Знайти рівняння площини, яка проходить через точку $M(6; 8; -7)$, паралельно до площини $4x-5y+3z-2=0$.

- 26) Дано дві точки $M(6; -3; 1)$ і $P(4; 2; 0)$. Знайти рівняння площини, яка проходить через точку M , перпендикулярно до вектора $N = MP$.
- 27) Знайти рівняння площини, яка проходить через точку $M(3; -4; 0)$, паралельно до площини $4x-2y+z-5=0$.
- 28) Дано дві точки $M(2; -1; 3)$ і $P(0; 5; -2)$. Знайти рівняння площини, яка проходить через точку M , перпендикулярно до вектора $N = MP$.
- 29) Знайти рівняння площини, яка проходить через точку $M(3; 5; -8)$, паралельно до площини $5x-3y+2z-7=0$.
- 30) Дано дві точки $M(3; 5; 0)$ і $P(2; 7; -6)$. Знайти рівняння площини, яка проходить через точку M , перпендикулярно до вектора $N = MP$.

Завдання 4. Знайти рівняння площини, яка проходить через точку M , перпендикулярно до площин.

- | | |
|--|--|
| 1) $M(7; -2; 5), x-2y+z-4=0,$ $x+2y-2z+4=0;$ | 2) $M(3; 1; -2), x+2y-4z+5=0,$ $3x-y+2z-7=0;$ |
| 3) $M(4; -2; 5), 2x+3y-4z+5=0,$ $3x-2y-z+7=0;$ | 4) $M(7; -2; 5), 4x-3y+8z+1=0,$ $3x+3y-3z-12=0;$ |
| 5) $M(8; -2; 3), x-3y+5z-14=0,$ $2x-5y-3z+4=0;$ | 6) $M(3; -2; 5), 4x-5y-2z-4=0,$ $7x+y-3z+12=0;$ |
| 7) $M(-8; -3; 9), 3x+7y-2z-14=0,$ $3x-5y+4z-20=0;$ | 8) $M(2; -2; 5), x-6y+3z-4=0,$ $2y-2z+4=0;$ |
| 9) $M(-4; -6; -2), -3x+8y+z-15=0,$ $-3x-3y-3z+2=0;$ | 10) $M(-2; -2; 1), -3x+7y+3z-14=0,$ $3x-y+2z+40=0;$ |
| 11) $M(5; 0; -3), 8x-2y-z+6=0,$ $4x+y+2z-3=0;$ | 12) $M(8; -4; -1), 6x-3y+2z+8=0,$ $2x+y-z+34=0;$ |
| 13) $M(6; 0; -2), 6x-3y+2z+8=0,$ $2x+y-z+6=0;$ | 14) $M(6; -5; 0), 8x-2y+z-3=0,$ $6x+4y-4z-2=0;$ |
| 15) $M(4; -3; -2), 4x+2y+6z-5=0,$ $5x-2y+2z+3=0;$ | 16) $M(6; -3; 0), 8x-y+3z-13=0,$ $4x-5y-z+3=0;$ |
| 17) $M(4; 8; -3), 4x-2y+5z-3=0,$ $8x-y-z+20=0;$ | 18) $M(8; -2; -1), 6x-5y+3z+2=0,$ $5x+2y-4z+3=0;$ |
| 19) $M(9; -3; 2), 8x-6y+5z-6=0,$ $4x-3y+8z-5=0;$ | 20) $M(8; 4; -2), 9x-3y+3z+3=0,$ $5x-6y+5z+4=0;$ |
| 21) $M(8; -7; 3), 4x+2y-z-5=0,$ $5x+6y+2z-9=0;$ | 22) $M(5; -7; -3), 3x-7y+2z-4=0,$ $7x+3y-z+2=0;$ |
| 23) $M(8; -5; 3), 4x+2y-3z+5=0,$ $8x-3y+z-6=0;$ | 24) $M(7; -6; -3), 8x-4y-5z+8=0,$ $5x-y+2z+9=0;$ |
| 25) $M(6; -7; 4), 10x-6y+3z-5=0,$ $9x-4y-2z+8=0;$ | 26) $M(4; -9; 7), 8x-6y+9z-3=0,$ $7x-5y-3z+7=0;$ |

27) $M(8; -5; 3), 4x+2y-3z+5=0,$
 $8x-3y+z-6=0;$

29) $M(7; -2; 5), 4x-3y+8z+1=0,$
 $3x-4y+2z+7=0;$

28) $M(6; -3; 0), 8x-y+3z-2=0,$
 $4x-5y-z+3=0;$

30) $M(4; -2; 7), 9x-y-z+4=0,$
 $3x+5y-7z-2=0.$

Завдання 5. Дано координати точок А і В та рівняння площини. а) записати рівняння прямої, яка проходить через точки А і В; б) визначити координати точки перетину прямої АВ із площиною;

1) $A(1; 0; 3) i B(7; 2; -1),$
 $2x-y+z-4=0;$

3) $A(3; -4; 0) i B(7; 5; -1),$
 $4x-2y+z-2=0;$

5) $A(2; -5; 6) i B(6; -3; 0),$
 $4x-5y+z-7=0;$

7) $A(4; -7; 3) i B(5; 2; 0),$
 $6x-3y+5z-8=0;$

9) $A(6; -3; 1) i B(4; 2; 0),$
 $5x-4y+2z-7=0;$

11) $A(1; 0; -1) i B(3; 4; -2),$
 $3x+y+z+4=0;$

13) $A(1; 3; -2) i B(3; 5; -1),$
 $2x+3y-z+4=0;$

15) $A(3; -1; 2) i B(3; -3; 0),$
 $3x-2y+5z-4=0;$

17) $A(1; -5; 0) i B(3; 2; -4),$
 $2x-y+2z-3=0;$

19) $A(8; 4; -2) i B(-3; 5; 0),$
 $3x-2y+z+3=0;$

21) $A(6; -3; 1) i B(4; 2; 0),$
 $5x-4y+2z-7=0;$

23) $A(5; 2; 0) i B(6; 3; 4),$
 $6x+2y-z+3=0;$

25) $A(6; 2; -3) i B(4; 0; -3),$
 $3x+2y-7z+5=0;$

27) $A(2; -1; 3) i B(0; 5; -2),$
 $\alpha 3x-4y+2z-1=0;$

29) $A(3; -4; 0) i B(7; 5; -1),$
 $\alpha 4x-2y+z-2=0;$

2) $A(2; -1; 3) i B(0; 5; -2),$
 $3x-4y+2z-1=0;$

4) $A(4; -7; 0) i B(1; 5; 3),$
 $2x-y+3z-1=0;$

6) $A(4; -7; 3) i B(5; 2; 0),$
 $6x-3y+5z-8=0;$

8) $A(4; -7; 3) i B(1; 5; 0),$
 $2x-3y+z-1=0;$

10) $A(4; 7; -2) i B(0; -1; 3),$
 $3x+2y-z+3=0;$

12) $A(1; 0; 3) i B(4; 0; 3),$
 $2x-y+z-4=0;$

14) $A(1; 5; 0) i B(3; -3; 4),$
 $3x+2y-4z+5=0;$

16) $A(1; 4; -1) i B(3; -2; 4),$
 $3x+2y-z+3=0;$

18) $A(1; 2; -3) i B(3; -1; 0),$
 $3x-2y+3z-4=0;$

20) $A(4; -6; -2) i B(0; -4; 5),$
 $5x+3y-4z-6=0;$

22) $A(4; 0; -6) i B(5; -2; 3),$
 $5x-3y+z-7=0;$

24) $A(6; 8; -7) i B(4; 3; 0),$
 $4x-5y+3z-2=0;$

26) $A(3; 5; 0) i B(2; 7; -6),$
 $4x-2y+5z-6=0;$

28) $A(3; 5; -8) i B(8; -7; 2),$
 $\alpha 5x-3y+2z-7=0;$

30) $A(1; -3; 6) i B(9; -3; 0),$
 $4x-5y+z-7=0.$

Розділ II. Вступ в математичний аналіз. Диференціальне та інтегральне числення

§ 1. Вступ в математичний аналіз

Приклад 1. Дано числа $z_1 = 2 + 3i$; $z_2 = -4 + i$; $z_3 = -5i$. Обчислити: а) $z_1 + z_2$;

б) $z_2 - z_3$; в) $z_1 \cdot z_2$; г) $\frac{z_2}{z_1}$.

Розв'язання. а) $z_1 + z_2 = (2 + 3i) + (-4 + i) = (2 + (-4)) + (3 + 1)i = -2 + 4i$.

б) $z_2 - z_3 = (-4 + i) - (-5i) = -4 + (1 - (-5))i = -4 + 6i$.

в) для множення комплексних чисел скористаємось спочатку формулою, наведеною вище

$$z_1 \cdot z_2 = (2 + 3i) \cdot (-4 + i) = (2 \cdot (-4) - 3 \cdot 1) + (2 \cdot 1 + 3 \cdot (-4))i = -11 - 10i.$$

Помножимо ці числа за правилом множення многочлена на многочлен

$$z_1 \cdot z_2 = (2 + 3i) \cdot (-4 + i) = -8 + 2i - 12i + 3i^2 = -8 - 10i - 3 = -11 - 10i.$$

Результат один і той же, тому можна множити будь-яким способом.

г) виконуючи ділення помножимо спочатку чисельник та знаменник дробу на число $2 - 3i$, яке спряжене із знаменником.

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{-4 + i}{2 + 3i} = \frac{(-4 + i) \cdot (2 - 3i)}{(2 + 3i) \cdot (2 - 3i)} = \frac{-8 + 12i + 2i - 3i^2}{4 - 9i^2} = \frac{-8 + 14i + 3}{4 + 9} = \frac{-5 + 14i}{13} = -\frac{5}{13} + \frac{14}{13}i$$

Приклад 2. Розв'язати квадратне рівняння $x^2 - 4x + 53 = 0$

Розв'язання. $D = (-4)^2 - 4 \cdot 53 = 16 - 212 = -196 = 196i^2$;

$$x_1 = \frac{4 - \sqrt{196i^2}}{2} = \frac{4 - 14i}{2} = 2 - 7i; \quad x_2 = \frac{4 + \sqrt{196i^2}}{2} = \frac{4 + 14i}{2} = 2 + 7i.$$

Перевірка:

$$1) (2 - 7i)^2 - 4(2 - 7i) + 53 = 0 \Rightarrow 4 - 28i + 49i^2 - 8 + 28i + 53 = 0 \Rightarrow 4 - 28i - 49 - 8 + 28i + 53 = 0 \Rightarrow 0 = 0.$$

$$2) (2 + 7i)^2 - 4(2 + 7i) + 53 = 0 \Rightarrow 4 + 28i + 49i^2 - 8 - 28i + 53 = 0 \Rightarrow 4 + 28i - 49 - 8 - 28i + 53 = 0 \Rightarrow 0 = 0.$$

Приклад 3. Обчислити границі: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{3x^2 + 5x - 2}{x^2 - x - 6}$,

якщо а) $a = 1$; б) $a = -2$; в) $a = \infty$.

Розв'язання. а) Оскільки значення знаменника в точці $a = 1$ дорівнює $-6 \neq 0$, то

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + 5x - 2}{x^2 - x - 6} = \frac{3 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 - 2}{1^2 - 1 - 6} = \frac{6}{-6} = -1;$$

б) Так як значення і знаменника і чисельника в точці $a = -2$ дорівнюють нулю, то чисельник та знаменник дробу розкладемо на множники. Пригадаємо, що для

розкладання на множники квадратного тричлена використовують формулу $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, де x_1 та x_2 корені рівняння $ax^2 + bx + c = 0$. Тоді

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 + 5x - 2}{x - x - 6} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3(x+2)\left(x - \frac{1}{3}\right)}{(x+2)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3\left(x - \frac{1}{3}\right)}{(x-3)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x-1}{x-3} = \frac{3 \cdot (-2) - 1}{-2 - 3} = \frac{-7}{-5} = 1 \frac{2}{5};$$

в) Оскільки $x \rightarrow \infty$, то поділимо чисельник та знаменник дробу почленно на x^2 (найвищій степінь многочленів)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 5x - 2}{x^2 - x - 6} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{5}{x} - \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}} = \frac{3+0-0}{1-0-0} = \frac{3}{1} = 3.$$

Приклад 4. Обчислити границю: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2 - \sqrt{x+1}}{x-3}$.

Розв'язання. Безпосередня підстановка граничного значення аргументу $x=3$ приводить до невизначеності вигляду $\left[\frac{0}{0} \right]$. Щоб розкрити цю невизначеність помножимо чисельник та знаменник на вираз $2 + \sqrt{x+1}$, спряжений із чисельником.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2 - \sqrt{x+1}}{x-3} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(2 - \sqrt{x+1})(2 + \sqrt{x+1})}{(x-3)(2 + \sqrt{x+1})} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{4 - \sqrt{(x+1)^2}}{(x-3)(2 + \sqrt{x+1})} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{4 - (x+1)}{(x-3)(2 + \sqrt{x+1})} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{4 - (x+1)}{(x-3)(2 + \sqrt{x+1})} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-1}{(x-3)(2 + \sqrt{x+1})} = -\frac{1}{4}.$$

Приклад 5. Обчислити границі: а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{x}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\sin 5x}$;

Розв'язання. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \sin 7x}{7x} = 7 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{7x} = 7 \cdot 1 = 7$;

б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\sin 5x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x \cdot \cos 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 3x}{x}}{\frac{\sin 5x}{x}} \cdot 1$

$$= \frac{3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x}}{5 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x}} = \frac{3}{5}$$

Приклад 6. Обчислити границі:

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{5}{x} \right)^{\frac{5}{x}}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+6}{3x-5} \right)^{-3x+1}$.

Розв'язання. а) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 23x)^{\frac{5}{x}} = [1^\infty] = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left((1 + (-23x))^{-23x} \right)^{\frac{1}{-23x}} = e^{-115} = \frac{1}{e^{115}}$

б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+6}{3x-5} \right)^{-3x+1} = [1^\infty] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n-5+5+6}{3n-5} \right)^{-3n+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{11}{3x-5} \right)^{-3x+1} =$

$= \left| \begin{array}{l} \frac{11}{3x-5} = \alpha \Rightarrow x = \frac{11}{3\alpha} + \frac{5}{3} \\ x \rightarrow \infty, \Rightarrow \alpha \rightarrow 0 \end{array} \right| = \lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{-3 \left(\frac{11}{3\alpha} + \frac{5}{3} \right)} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{-\frac{11}{\alpha} - 5} =$

$= \lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{-\frac{11}{\alpha}} \cdot \lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{-5} = \left(\lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \right)^{-11} \cdot 1 = e^{-11} = \frac{1}{e^{11}}$

Приклад 7. При якому значенні λ функція $f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x + 8\lambda, & \text{якщо } x \leq 1, \\ \lambda x + 9, & \text{якщо } x > 1 \end{cases}$ буде

неперервна на всій числовій прямій.

Розв'язання. Для того, щоб функція була неперервною в точці $x=1$ необхідно, щоб виконувались три умови неперервності.

а) в точці $x=1$ функція визначена $f(1) = 1 - 6 + 8\lambda = -5 + 8\lambda$;

б) знайдемо односторонні границі $\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = 1 - 6 + 8\lambda = -5 + 8\lambda$ та

$\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lambda + 9$. Ці границі мають бути рівними $-5 + 8\lambda = \lambda + 9 \Rightarrow 7\lambda = 14 \Rightarrow \lambda = 2$

. Отже, при $\lambda = 2$ $\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = 11$ і $\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = 11$;

в) Значення функції в точці $x = 1$ $f(1) = 11$.

Тобто при $\lambda = 2$ функція буде неперервною в точці $x = 1$.

Приклад 8. Знайти точки розриву функції та встановити їх характер. У випадку усунютого розриву довизначити функцію так, щоб вона була неперервною:

$f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1, \\ \frac{x^2 - x - 6}{x + 2}, & x > 1. \end{cases}$

а) $\begin{cases} x, & x \leq 1; \\ x+1, & x > 1; \end{cases}$ б) $\frac{x^2 - x - 6}{x + 2}$ в) $f(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x - 3}$.

Розв'язання. а) Точка $x_0 = 1$ є «підозрілою» на розрив, оскільки в ній функція змінює закон визначеності. На проміжку $(-\infty; 1)$ маємо $f(x) = x$; на проміжку $(1; +\infty)$ — інша залежність: $f(x) = x + 1$. Це лінійні функції. Тому дана функція неперервна на проміжках $(-\infty; 1)$ і $(1; +\infty)$.

Знаходимо $\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = 1$ та $\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = 2$. Оскільки вказані границі скінченні і

$\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$, то функція $f(x) = \begin{cases} x, & \text{при } x \leq 1, \\ x+1, & \text{при } x > 1, \end{cases}$

у точці $x_0 = 1$ має розрив I роду.

б) Дана функція $y = \frac{3x}{x+2}$ визначена і неперервна на проміжках $(-\infty; -2)$ і $(-2; \infty)$. Визначимо односторонні границі функції при $x \rightarrow -2$.

$$\lim_{x \rightarrow -2-0} \frac{3x}{x+2} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -2+0} \frac{3x}{x+2} = -\infty,$$

Отже, при $x = -2$ дана функція має розрив другого роду.

в) Дана функція неперервна в усіх точках, крім $x = 3$, в якій вона невизначена.

$$\lim_{x \rightarrow 3-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3-0} \frac{x^2 - x - 6}{x-3} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 3-0} \frac{(x-3)(x+2)}{(x-3) \cdot 0} = \lim_{x \rightarrow 3-0} (x+2) = 5. \quad \text{Аналогічно}$$

$$\text{знаходимо } \lim_{x \rightarrow 3+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3+0} \frac{x^2 - x - 6}{x-3} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 3+0} \frac{(x-3)(x+2)}{(x-3) \cdot 0} = \lim_{x \rightarrow 3+0} (x+2) = 5.$$

В точці $x = 3$ функція невизначена, але односторонні границі існують і вони скінченні. Отже в цій точці функція має розрив першого роду. Оскільки односторонні границі рівні між собою, то цей розрив - усувний. Щоб функція стала неперервною в точці $x = 3$ потрібно, щоб значення її в цій точці дорівнювало значенню односторонніх границь, тобто $f(3) = 5$. Звідси

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 6}{x-3}, & \text{при } x \neq 3 \\ 5, & \text{при } x = 3 \end{cases}$$

Завдання для самостійної роботи

Завдання 1. Виконати дії: а) $z_1 + z_2$; б) $z_2 - z_4$; в) $z_1 \cdot z_2 - z_3$; г) $\frac{z_2}{z_1} + z_4$.

- | | |
|--|--|
| 1) $z_1 = 5 - i, z_2 = -2 + 4i, z_3 = 9, z_4 = 3i$; | 2) $z_1 = -42 - 2i, z_2 = 12 + 3i, z_3 = 11, z_4 = -5i$; |
| 3) $z_1 = -2 + 4i, z_2 = 4 - 3i, z_3 = 4, z_4 = 5i$; | 4) $z_1 = 16 + 8i, z_2 = -7 - 4i, z_3 = -23, z_4 = 15i$; |
| 5) $z_1 = 7 + 3i, z_2 = -2 - 3i, z_3 = 9, z_4 = 3i$; | 6) $z_1 = -19 + i, z_2 = -4 - 11i, z_3 = 54, z_4 = 71i$; |
| 7) $z_1 = -2 + 5i, z_2 = 8 + i, z_3 = 1, z_4 = -2i$; | 8) $z_1 = 7 - 13i, z_2 = -9 + 9i, z_3 = -14, z_4 = -2i$; |
| 9) $z_1 = -5 + i, z_2 = 7 - 7i, z_3 = 3, z_4 = -4i$; | 10) $z_1 = -14 - i, z_2 = -8 + 11i, z_3 = 2, z_4 = -41i$; |
| 11) $z_1 = 10 - 2i, z_2 = -8 - i, z_3 = 42, z_4 = i$; | 12) $z_1 = 11 - 23i, z_2 = -42 + 9i, z_3 = 5, z_4 = 8i$; |
| 13) $z_1 = 15 + i, z_2 = 41 - 2i, z_3 = 14, z_4 = -9i$; | 14) $z_1 = -4 - 5i, z_2 = 18 + 11i, z_3 = 2, z_4 = 25i$; |
| 15) $z_1 = -11 + 3i, z_2 = 8 + 7i, z_3 = 10, z_4 = i$; | 16) $z_1 = 55 - i, z_2 = -2 + 4i, z_3 = 47, z_4 = -2i$; |
| 17) $z_1 = 24 - 5i, z_2 = -7 + 9i, z_3 = 32, z_4 = -4i$; | 18) $z_1 = 7 - 29i, z_2 = -58 + 9i, z_3 = -4, z_4 = 4i$; |
| 19) $z_1 = 4 - i, z_2 = -7 + 6i, z_3 = -17, z_4 = 8i$; | 20) $z_1 = 4 - 5i, z_2 = -1 + 9i, z_3 = 14, z_4 = -17i$; |
| 21) $z_1 = 2 + 10i, z_2 = -3 + 6i, z_3 = 40, z_4 = -3i$; | 22) $z_1 = -27 + 3i, z_2 = 4 + 32i, z_3 = 18, z_4 = -5i$; |
| 23) $z_1 = 14 - 3i, z_2 = 35 + 2i, z_3 = -3, z_4 = 10i$; | 24) $z_1 = 80 + 6i, z_2 = -8 + 7i, z_3 = 16, z_4 = -23i$; |
| 25) $z_1 = -15 - i, z_2 = 18 + 4i, z_3 = 11, z_4 = -13i$; | 26) $z_1 = -95 - 7i, z_2 = 7 + 17i, z_3 = -4, z_4 = -i$; |

27) $z_1 = 5 + 7i, z_2 = -9 + 7i, z_3 = -12, z_4 = 28i$ 28) $z_1 = 68 + i, z_2 = -9 + 9i, z_3 = 52, z_4 = 22i$;
 29) $z_1 = 45 + i, z_2 = 4 - 9i, z_3 = -52, z_4 = 22i$; 30) $z_1 = 9 - 15i, z_2 = -17 + 19i, z_3 = -2, z_4 = 4i$.

Завдання 2. Розв'язати квадратне рівняння та зробити перевірку:

- 1) а) $x^2 - 10x + 41 = 0$, б) $16x^2 + 40x + 29 = 0$; 2) а) $x^2 - 2x + 50 = 0$, б) $16x^2 - 16x + 85 = 0$
 3) а) $x^2 - 16x + 89 = 0$, б) $25x^2 - 40x + 32 = 0$; 4) а) $x^2 - 6x + 10 = 0$, б) $25x^2 + 50x + 34 = 0$;
 5) а) $x^2 - 4x + 85 = 0$, б) $9x^2 + 36x + 40 = 0$; 6) а) $x^2 - 4x + 5 = 0$, б) $25x^2 - 30x + 58 = 0$;
 7) а) $x^2 - 10x + 26 = 0$, б) $16x^2 + 32x + 41 = 0$; 8) а) $x^2 - 10x + 74 = 0$, б) $x^2 - 6x + 25 = 0$;
 9) а) $x^2 + 2x + 5 = 0$, б) $16x^2 + 40x + 29 = 0$; 10) а) $x^2 - 8x + 41 = 0$, б) $9x^2 - 24x + 25 = 0$;
 11) а) $x^2 + 8x + 80 = 0$, б) $25x^2 - 20x + 8 = 0$; 12) а) $x^2 - 8x + 25 = 0$, б) $4x^2 + 24x + 37 = 0$;
 13) а) $x^2 + 6x + 10 = 0$, б) $9x^2 - 18x + 34 = 0$; 14) а) $x^2 + 14x + 50 = 0$, б) $x^2 - 10x + 29 = 0$;
 15) а) $x^2 - 18x + 97 = 0$, б) $4x^2 + 16x + 17 = 0$; 16) а) $x^2 - 2x + 82 = 0$, б) $4x^2 - 24x + 45 = 0$;
 17) а) $x^2 - 12x + 52 = 0$, б) $25x^2 - 10x + 37 = 0$; 18) а) $x^2 - 12x + 40 = 0$, б) $4x^2 - 4x + 101 = 0$;
 19) а) $x^2 + 14x + 53 = 0$, б) $9x^2 + 12x + 53 = 0$; 20) а) $x^2 - 10x + 61 = 0$, б) $16x^2 - 24x + 45 = 0$;
 21) а) $x^2 + 18x + 90 = 0$, б) $16x^2 + 24x + 73 = 0$; 22) а) $x^2 - 4x + 13 = 0$, б) $16x^2 + 8x + 65 = 0$;
 23) а) $x^2 - 6x + 73 = 0$, б) $2x^2 - 10x + 25 = 0$; 24) а) $x^2 + 6x + 58 = 0$, б) $9x^2 + 30x + 41 = 0$;
 25) а) $x^2 + 18x + 97 = 0$, б) $4x^2 + 16x + 17 = 0$; 26) а) $x^2 + 4x + 40 = 0$, б) $25x^2 + 50x + 34 = 0$;
 27) а) $x^2 + 10x + 74 = 0$, б) $4x^2 + 12x + 109 = 0$; 28) а) $x^2 - 2x + 50 = 0$, б) $x^2 - 12x + 45 = 0$;
 29) а) $x^2 - 16x + 100 = 0$, б) $x^2 - 4x + 8 = 0$; 30) а) $x^2 + 8x + 80 = 0$, б) $25x^2 - 20x + 8 = 0$.

Завдання 3. Знайти границю:

- 1) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 + 2x - 15}{x^2 + 3x - 18}$, якщо 2) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{2x^2 + 14x + 20}{3x^2 + 14x - 5}$, якщо 3) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 7x - 6}{2x^2 - 5x - 3}$, якщо
 а) а=6; б) а=3; в) а=∞. а) а=2; б) а=-5; в) а=∞. а) а=-1; б) а=3; в) а=∞.
 4) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{2x^2 - 3x - 2}{x^2 + x - 6}$, якщо 5) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{7x^2 - 3x - 4}{10x^2 + 2x - 12}$, якщо 6) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{2x^2 - 3x - 2}{x^2 + 2x - 8}$, якщо
 а) а=-3; б) а=2; в) а=∞. а) а=-3; б) а=1; в) а=∞. а) а=-4; б) а=2; в) а=∞.
 7) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 + 4x - 12}{x^2 + x - 6}$, якщо 8) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{4x^2 + 5x - 9}{5x^2 - 4x - 1}$, якщо 9) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{2x^2 - 3x + 1}{3x^2 + 2x - 5}$, якщо
 а) а=-3; б) а=2; в) а=∞. а) а=3; б) а=1; в) а=∞. а) а=-2; б) а=1; в) а=∞.
 10) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 + 7x - 8}{x^2 + 4x - 5}$, якщо 11) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 + x - 6}$, якщо 12) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 + 2x - 15}{x^2 + x - 12}$, якщо
 а) а=-5; б) а=1; в) а=∞. а) а=-3; б) а=2; в) а=∞. а) а=-4; б) а=3; в) а=∞.
 13) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 + 5x - 6}{x^2 + 4x - 5}$, якщо 14) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 + 4x - 21}{x^2 + 2x - 15}$, якщо 15) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 + 4x - 12}{x^2 + 2x - 8}$, якщо
 а) а=-5; б) а=1; в) а=∞. а) а=-5; б) а=3; в) а=∞. а) а=-4; б) а=2; в) а=∞.
 16) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 5x - 6}$, якщо 17) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{3x^2 + 2x - 5}{6x^2 - x - 5}$, якщо 18) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 + 4x - 12}$, якщо
 а) а=-6; б) а=1; в) а=∞. а) а=1; б) а=-5; в) а=∞. а) а=-6; б) а=2; в) а=∞.

$$19) \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 + 4x - 5}, \text{ якщо}$$

а) $a=1$; б) $a=-5$; в) $a=\infty$.

$$22) \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - 2x - 3}{3x^2 - 6x - 9}, \text{ якщо}$$

а) $a=-1$; б) $a=3$; в) $a=\infty$.

$$25) \lim_{x \rightarrow a} \frac{2x^2 - 3x - 2}{x^2 - x - 2}, \text{ якщо}$$

а) $a=-1$; б) $a=2$; в) $a=\infty$.

$$28) \lim_{x \rightarrow a} \frac{8x^2 + 5x - 13}{-4x^2 - x + 5}, \text{ якщо}$$

а) $a=2$; б) $a=1$; в) $a=\infty$.

$$20) \lim_{x \rightarrow a} \frac{5x^2 - 6x + 1}{2x^2 + 3x - 5}, \text{ якщо}$$

а) $a=1$; б) $a=3$; в) $a=\infty$.

$$23) \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 + 2x - 15}{x^2 + 3x - 18}, \text{ якщо}$$

а) $a=-6$; б) $a=3$; в) $a=\infty$.

$$26) \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + x - 12}, \text{ якщо}$$

а) $a=-4$; б) $a=3$; в) $a=\infty$.

$$29) \lim_{x \rightarrow a} \frac{2x^2 + 7x - 15}{6x^2 + 30x}, \text{ якщо}$$

а) $a=0$; б) $a=-5$; в) $a=\infty$.

$$21) \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 + 3x - 10}{2x^2 - x - 6}, \text{ якщо а)}$$

$a=2$; б) $a=-5$; в) $a=\infty$.

$$24) \lim_{x \rightarrow a} \frac{3x^2 - 4x + 1}{2x^2 + 6x - 8}, \text{ якщо}$$

а) $a=-4$; б) $a=1$; в) $a=\infty$.

$$27) \lim_{x \rightarrow a} \frac{-3x^2 + 2x + 16}{6x^2 + 12x} \text{ при}$$

а) $a=0$; б) $a=-2$; в) $a=\infty$.

$$30) \lim_{x \rightarrow a} \frac{3x^2 - 11x - 4}{16 - x^2}, \text{ якщо}$$

а) $a=-4$; б) $a=4$; в) $a=\infty$.

Завдання 4. Знайти границю:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2\sqrt{x-2}}{3-x};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{\sqrt{x-2}};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x+5} - \sqrt{3x-3}}{x-4};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x+2} + x}{x+1};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 10} \frac{\sqrt{15+x} - \sqrt{3x-5}}{x-10};$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x+1} - 1}{\sqrt{3x+4} - 2};$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3x-2} - 2}{x-2};$$

$$9) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x+2} + x}{x+1};$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{3x^2 - x - 2};$$

$$11) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x-1}}{x^2 - 1};$$

$$12) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{x-5};$$

$$13) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{\sqrt{2x-1} - 3};$$

$$14) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x-1} - \sqrt{7-x}}{x-4};$$

$$15) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x-2} - \sqrt{4-x}}{3-x};$$

$$16) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{\sqrt{2x-1} - 3};$$

$$17) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+4} - 2}{\sqrt{x^2+9} - 3};$$

$$18) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{5+x}}{1 - \sqrt{5-x}};$$

$$19) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2\sqrt{x+1} - \sqrt{x+13}}{9-x^2};$$

$$20) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{9x+4} - 7}{x^2 - 25};$$

$$21) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+4} - \sqrt{8-x}}{2-x};$$

$$22) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x^2};$$

$$23) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x-2} - \sqrt{6-x}};$$

$$24) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + \sqrt{x+2}}{x+1};$$

$$25) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+3}{\sqrt{1-x} - \sqrt{x+7}};$$

$$26) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3x+4} - 2}{x^2 - 6x};$$

$$27) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{2x-6} - 2}{3x-15};$$

$$28) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x};$$

$$29) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2+5} - 3}{x-2};$$

$$30) \lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x-3}}{x^2 - 49};$$

Завдання 5. Знайти границю:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{3x};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{9x};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin 3x};$$

- | | | |
|--|--|--|
| 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sin 2x}$; | 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{x}$; | 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\operatorname{tg} 3x}$; |
| 7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\operatorname{tg} 15x}$; | 8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 14x}{\operatorname{tg} 2x}$; | 9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x \cos 3x}{\sin 5x}$; |
| 10) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{tg} 5x}$; | 11) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 4x}{\sin 6x}$; | 12) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 11x}{\operatorname{tg} 5x}$; |
| 13) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 17x}{\operatorname{tg} 5x}$; | 14) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{tg} 6x}$; | 15) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\operatorname{tg} 3x}$; |
| 16) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{tg} 6x}$; | 17) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 3x}$; | 18) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 4x}{x}$; |
| 19) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{2x}$; | 20) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 15x}$; | 21) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\operatorname{tg} 6x}$; |
| 22) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 8x}{2x}$; | 23) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\operatorname{tg} 8x}$; | 24) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\operatorname{tg} 2x}$; |
| 25) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{2x}$; | 26) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{\sin 8x}$; | 27) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\operatorname{tg} x}$; |
| 28) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 16x}{3x}$; | 29) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 4x}{\operatorname{tg} x}$; | 30) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{\sin 8x}$. |

Завдання 6. Знайти границю:

- | | | |
|---|---|---|
| 1) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+5x)^{\frac{3}{x}}$; | 2) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{2}{x}}$; | 3) $\lim_{x \rightarrow 0} (1-2x)^{\frac{4}{x}}$; |
| 4) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{8}{x}}$; | 5) $\lim_{x \rightarrow 0} (2x+1)^{\frac{6}{x}}$; | 6) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+3x)^{\frac{5}{x}}$; |
| 7) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{3}{x}}$; | 8) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+4x)^{\frac{2}{x}}$; | 9) $\lim_{x \rightarrow 0} (1-3x)^{\frac{6}{x}}$; |
| 10) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+7x)^{\frac{3}{x}}$; | 11) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+8x)^{\frac{4}{x}}$; | 12) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+7x)^{\frac{5}{x}}$; |
| 13) $\lim_{x \rightarrow 0} (1-9x)^{\frac{3}{x}}$; | 14) $\lim_{x \rightarrow 0} (1-6x)^{\frac{2}{x}}$; | 15) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+4x)^{\frac{9}{x}}$; |
| 16) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{3}{5x}}$; | 17) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+3x)^{\frac{3}{2x}}$; | 18) $\lim_{x \rightarrow 0} (1-4x)^{\frac{5}{2x}}$; |
| 19) $\lim_{x \rightarrow 0} (1-7x)^{\frac{6}{11x}}$; | 20) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{3}{7x}}$; | 21) $\lim_{x \rightarrow 0} (1-8x)^{\frac{3}{10x}}$; |
| 22) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+11x)^{\frac{3}{7x}}$; | 23) $\lim_{x \rightarrow 0} (1-13x)^{\frac{3}{5x}}$; | 24) $\lim_{x \rightarrow 0} (1-3x)^{\frac{3}{13x}}$; |

$$25) \lim_{x \rightarrow 0} (1+12x)^{\frac{3}{4x}};$$

$$26) \lim_{x \rightarrow 0} (1-15x)^{\frac{3}{7x}};$$

$$27) \lim_{x \rightarrow 0} (1+4x)^{\frac{3}{11x}};$$

$$28) \lim_{x \rightarrow 0} (1-6x)^{\frac{1}{6x}};$$

$$29) \lim_{x \rightarrow 0} (1-4x)^{\frac{3}{8x}};$$

$$30) \lim_{x \rightarrow 0} (1+9x)^{\frac{3}{7x}}.$$

Завдання 7. Знайти границю:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-2}{3x+1} \right)^{6x+4};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x-3}{4x+2} \right)^{2x+1};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x-5} \right)^{3x+1};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-2}{3x+4} \right)^{4-x};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x-3}{5x+7} \right)^{6-x};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+3}{3x-1} \right)^{4x};$$

$$7) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+4}{2x-9} \right)^{3x+1};$$

$$8) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+5}{2x-5} \right)^{3x};$$

$$9) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+4}{x-8} \right)^{5x+6};$$

$$10) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+4}{3x-2} \right)^{6x-4};$$

$$11) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x-6} \right)^{3x};$$

$$12) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x+4}{5x-2} \right)^{2x+4};$$

$$13) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x-7} \right)^{2x-1};$$

$$14) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x+2}{4x-5} \right)^{2x+3};$$

$$15) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x-1} \right)^{4x+1};$$

$$16) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x-3}{4x+5} \right)^{x-5};$$

$$17) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+2}{3x-3} \right)^{2x+3};$$

$$18) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x+4}{5x-2} \right)^{2x-1};$$

$$19) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x-5} \right)^{x+4};$$

$$20) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x+2}{4x-3} \right)^{2x+3};$$

$$21) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x+2}{5x-4} \right)^{2x+1};$$

$$22) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x-4} \right)^{4x-1};$$

$$23) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-2} \right)^{2x+3};$$

$$24) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-4}{3x+2} \right)^{2x+4};$$

$$25) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x-1}{4x+7} \right)^{3x-4};$$

$$26) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x+4} \right)^{2x-1};$$

$$27) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+4}{x+1} \right)^{2x+2};$$

$$28) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x+3} \right)^{4-x};$$

$$29) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x+1} \right)^{x-2};$$

$$30) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x-1} \right)^{3x}.$$

Завдання 8. Знайти, при якому значенні λ функція буде неперервна на всій числовій осі.

$$1) f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x + \lambda & \text{при } x \leq 2, \\ \lambda x - 3 & \text{при } x > 2; \end{cases}$$

$$2) f(x) = \begin{cases} x^2 + 6x + \lambda & \text{при } x \leq 3, \\ \lambda x + 2 & \text{при } x > 3; \end{cases}$$

$$3) f(x) = \begin{cases} x^2 + 5x + \lambda & \text{при } x \leq 4, \\ \lambda x - 5 & \text{при } x > 4; \end{cases}$$

$$4) f(x) = \begin{cases} x^2 + 7x + \lambda & \text{при } x \leq 5, \\ \lambda x + 4 & \text{при } x > 5; \end{cases}$$

$$5) f(x) = \begin{cases} x^2 + 6x + \lambda & \text{при } x \leq 7, \\ \lambda x - 8 & \text{при } x > 7; \end{cases}$$

$$6) f(x) = \begin{cases} x^2 + 7x + \lambda & \text{при } x \leq 3, \\ \lambda x + 6 & \text{при } x > 3; \end{cases}$$

$$7) f(x) = \begin{cases} x^2 + 9x + \lambda & \text{при } x \leq 1, \\ \lambda x + 5 & \text{при } x > 1; \end{cases}$$

$$8) f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x + \lambda & \text{при } x \leq 6, \\ \lambda x + 7 & \text{при } x > 6; \end{cases}$$

- 9) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 8x + \lambda & \text{при } x \leq 3, \\ \lambda x + 4 & \text{при } x > 3; \end{cases}$
- 10) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + \lambda & \text{при } x \leq 3, \\ \lambda x - 4 & \text{при } x > 3; \end{cases}$
- 11) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + \lambda & \text{при } x \leq 5, \\ \lambda x - 3 & \text{при } x > 5; \end{cases}$
- 12) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 5x + \lambda & \text{при } x \leq 4, \\ \lambda x + 2 & \text{при } x > 4; \end{cases}$
- 13) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x + \lambda & \text{при } x \leq 1, \\ \lambda x - 4 & \text{при } x > 1; \end{cases}$
- 14) $f(x) = \begin{cases} x^2 + x + \lambda & \text{при } x \leq 5, \\ \lambda x + 3 & \text{при } x > 5; \end{cases}$
- 15) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + \lambda & \text{при } x \leq 3, \\ \lambda x - 2 & \text{при } x > 3; \end{cases}$
- 16) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + \lambda & \text{при } x \leq 4, \\ \lambda x - 5 & \text{при } x > 4; \end{cases}$
- 17) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + \lambda & \text{при } x \leq 5, \\ \lambda x - 4 & \text{при } x > 5; \end{cases}$
- 18) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + \lambda & \text{при } x \leq 3, \\ \lambda x - 2 & \text{при } x > 3; \end{cases}$
- 19) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 5x + \lambda & \text{при } x \leq 2, \\ \lambda x - 4 & \text{при } x > 2; \end{cases}$
- 20) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 7x + \lambda & \text{при } x \leq 4, \\ \lambda x + 6 & \text{при } x > 4; \end{cases}$
- 21) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 8x + \lambda & \text{при } x \leq 5, \\ \lambda x - 3 & \text{при } x > 5; \end{cases}$
- 21) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + \lambda & \text{при } x \leq 4, \\ \lambda x - 2 & \text{при } x > 4; \end{cases}$
- 23) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 6x + \lambda & \text{при } x \leq 4, \\ \lambda x - 2 & \text{при } x > 4; \end{cases}$
- 24) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 6x + \lambda & \text{при } x \leq 6, \\ \lambda x - 5 & \text{при } x > 6; \end{cases}$
- 25) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 5x + \lambda & \text{при } x \leq 2, \\ \lambda x - 7 & \text{при } x > 2; \end{cases}$
- 26) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 6x + \lambda & \text{при } x \leq 8, \\ \lambda x - 2 & \text{при } x > 8; \end{cases}$
- 27) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 7x + \lambda & \text{при } x \leq 5, \\ \lambda x + 5 & \text{при } x > 5; \end{cases}$
- 28) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 6x + \lambda & \text{при } x \leq 7, \\ \lambda x - 8 & \text{при } x > 7; \end{cases}$
- 29) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 5x + \lambda & \text{при } x \leq 4, \\ \lambda x - 5 & \text{при } x > 4; \end{cases}$
- 30) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 9x + \lambda & \text{при } x \leq 1, \\ \lambda x + 5 & \text{при } x > 1; \end{cases}$

Завдання 9. Дослідити функцію на розрив і побудувати графік:

- 1) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x - 3, \text{ якщо } x \leq 3, \\ 2x - 4, \text{ якщо } x > 3; \end{cases}$
- 2) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 3 - 6, \text{ якщо } x \leq 4, \\ 3x - 5, \text{ якщо } x > 4; \end{cases}$
- 3) $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 3x - 6, \text{ якщо } x \leq 2, \\ 6x - 4, \text{ якщо } x > 2; \end{cases}$
- 4) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x - 9, \text{ якщо } x \leq 3, \\ 7x - 4, \text{ якщо } x > 3; \end{cases}$
- 5) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 5x - 3, \text{ якщо } x \leq -3, \\ 8x - 5, \text{ якщо } x > -3; \end{cases}$
- 6) $f(x) = \begin{cases} 5x^2 + 3x - 3, \text{ якщо } x \leq 2, \\ 2x + 3, \text{ якщо } x > 2; \end{cases}$
- 7) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 9x - 2, \text{ якщо } x \leq 4, \\ 8x - 2, \text{ якщо } x > 4; \end{cases}$
- 8) $f(x) = \begin{cases} 4x^2 - x - 3, \text{ якщо } x \leq -2, \\ -7x + 4, \text{ якщо } x > -2; \end{cases}$
- 9) $f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 7, \text{ якщо } x \leq -2, \\ 5x + 4, \text{ якщо } x > -2; \end{cases}$
- 10) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 9x - 1, \text{ якщо } x \leq -5, \\ 2x - 1, \text{ якщо } x > -5; \end{cases}$

$$11) f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 7x - 2, & \text{якщо } x \leq 3, \\ 6x - 7, & \text{якщо } x > 3; \end{cases}$$

$$12) f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 8, & \text{якщо } x \leq -7, \\ 2x + 3, & \text{якщо } x > -7; \end{cases}$$

$$13) f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x - 4, & \text{якщо } x \leq -2, \\ 2x + 5, & \text{якщо } x > -2; \end{cases}$$

$$14) f(x) = \begin{cases} 5x^2 + x - 6, & \text{якщо } x \leq 4, \\ 8x - 7, & \text{якщо } x > 4; \end{cases}$$

$$15) f(x) = \begin{cases} x^2 - 9x + 4, & \text{якщо } x \leq -5, \\ x - 7, & \text{якщо } x > -5; \end{cases}$$

$$16) f(x) = \begin{cases} x^2 + 8x - 5, & \text{якщо } x \leq 6, \\ x - 4, & \text{якщо } x > 6; \end{cases}$$

$$17) f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x - 3, & \text{якщо } x \leq 8, \\ 2x + 4, & \text{якщо } x > 8; \end{cases}$$

$$18) f(x) = \begin{cases} x^2 + 7x - 3, & \text{якщо } x \leq 3, \\ 5x - 4, & \text{якщо } x > 3; \end{cases}$$

$$19) f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x - 7, & \text{якщо } x \leq 5, \\ 2x - 5, & \text{якщо } x > 5; \end{cases}$$

$$20) f(x) = \begin{cases} -7x^2 + 3x - 3, & \text{якщо } x \leq 1, \\ 9x - 4, & \text{якщо } x > 1; \end{cases}$$

$$21) f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 5x - 3, & \text{якщо } x \leq -4, \\ 7x + 4, & \text{якщо } x > -4; \end{cases}$$

$$22) f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 3, & \text{якщо } x \leq 2, \\ 8x - 5, & \text{якщо } x > 2; \end{cases}$$

$$23) f(x) = \begin{cases} x^2 + 8x + 7, & \text{якщо } x \leq 6, \\ 3x - 4, & \text{якщо } x > 6; \end{cases}$$

$$24) f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x - 7, & \text{якщо } x \leq -4, \\ 2x + 9, & \text{якщо } x > -4; \end{cases}$$

$$25) f(x) = \begin{cases} 8x^2 + x, & \text{якщо } x \leq 5, \\ x - 3, & \text{якщо } x > 5; \end{cases}$$

$$26) f(x) = \begin{cases} 7x^2 - 3, & \text{якщо } x \leq -2, \\ 2x - 9, & \text{якщо } x > -2; \end{cases}$$

$$27) f(x) = \begin{cases} x^2 + 5x + 6, & \text{якщо } x \leq -4, \\ 5x - 4, & \text{якщо } x > -4; \end{cases}$$

$$28) f(x) = \begin{cases} 7x^2 + 3x - 8, & \text{якщо } x \leq 1, \\ 9x - 4, & \text{якщо } x > 1; \end{cases}$$

$$29) f(x) = \begin{cases} x^2 + 7x - 12, & \text{якщо } x \leq -3, \\ 8x - 1, & \text{якщо } x > -3; \end{cases}$$

$$30) f(x) = \begin{cases} x^2 + 9x - 3, & \text{якщо } x \leq -8, \\ x - 3, & \text{якщо } x > -8; \end{cases}$$

Завдання 10. Знайти точки розриву функції, встановити їх характер, у випадку усунутого розриву до визначити функцію до неперервності.

$$1) \quad \text{а) } y = \frac{1}{2-x}; \quad \text{б) } y = \frac{3x^2 + 13x - 10}{x+5};$$

$$2) \quad \text{а) } f(x) = \frac{2x}{1-x}; \quad \text{б) } y = \frac{2x^2 - 6x + 4}{x-2};$$

$$3) \quad \text{а) } y = \frac{2x+3}{3x-2}; \quad \text{б) } y = \frac{4x^2 - x - 5}{x+1};$$

$$4) \quad \text{а) } y = \frac{1}{x^2(x-1)}; \quad \text{б) } y = \frac{4x^2 + 3x - 10}{x+2};$$

$$5) \quad \text{а) } y = 3^x; \quad \text{б) } y = \frac{3x^2 - 7x + 4}{x-1};$$

$$6) \quad \text{а) } y = \frac{x^2}{3-x}; \quad \text{б) } y = \frac{2x^2 + 13x + 20}{x+4};$$

$$7) \quad \text{а) } y = \frac{1}{x^2 + 5x + 6}; \quad \text{б) } y = \frac{7x^2 + 19x - 6}{x+3};$$

$$8) \quad \text{а) } y = \frac{4}{(2-x)^2}; \quad \text{б) } y = \frac{x^2 + 2x - 15}{x+5};$$

$$9) \quad \text{а) } y = \frac{9x+1}{x^2 + 3x - 4}; \quad \text{б) } y = \frac{2x^2 - 5x + 2}{x-2};$$

$$10) \quad \text{а) } y = \frac{x-5}{x^2 - 3x - 18}; \quad \text{б) } y = \frac{3x^2 + 7x - 6}{x+3};$$

- 11) а) $y = \frac{4x}{5-x}$; б) $y = \frac{x^2 - 3x - 15}{x+5}$; 12) а) $y = \frac{4x-3}{x^2-25}$; б) $y = \frac{5x^2 - x - 6}{x+1}$;
13) а) $y = \frac{2x}{5+x}$; б) $y = \frac{6x^2 - 11x + 5}{x-1}$; 14) а) $y = \frac{3x+4}{x^2-16}$; б) $y = \frac{7x^2 + 8x - 12}{x+2}$;
15) а) $y = \frac{3x}{3+x}$; б) $y = \frac{6x^2 - 19x + 14}{x-2}$; 16) а) $y = \frac{2x-8}{x^2+7x+10}$; б) $y = \frac{5x^2 - 9x - 18}{x-3}$;
17) а) $y = \frac{6x-5}{x^2-36}$; б) $y = \frac{4x^2 + 11x - 20}{x+4}$; 18) а) $y = \frac{4x}{4-x}$; б) $y = \frac{3x^2 - 11x - 20}{x-5}$;
19) а) $y = \frac{4x}{4+x}$; б) $y = \frac{2x^2 + 9x - 18}{x+6}$; 20) а) $y = \frac{2x}{x^2 - 2x - 48}$; б) $y = \frac{x^2 - 5x - 14}{x-7}$;
21) а) $y = \frac{3x}{5+x}$; б) $y = \frac{2x^2 - 5x - 18}{x+2}$; 22) а) $y = \frac{5-3x}{x^2-49}$; б) $y = \frac{3x^2 + 2x - 16}{x-2}$;
23) а) $y = \frac{3x}{x-8}$; б) $y = \frac{4x^2 - 19x + 21}{x-3}$; 24) а) $y = \frac{-x}{x^2-1}$; б) $y = \frac{5x^2 - 14x - 24}{x-4}$;
25) а) $y = \frac{3x}{6+2x}$; б) $y = \frac{6x^2 + 19x - 90}{x+4}$; 26) а) $y = \frac{1}{4x-x^2-3}$; б) $y = \frac{7x^2 - 17x - 12}{x-3}$;
27) а) $y = \frac{6x+1}{5+2x}$; б) $y = \frac{6x^2 - 7x - 10}{x-2}$; 28) а) $y = \frac{2-x}{x^2+x-6}$; б) $y = \frac{4x^2 - 17x - 15}{x-5}$;
29) а) $y = \frac{3+x}{8+2x}$; б) $y = \frac{5x^2 + 39x - 8}{x+8}$; 30) а) $y = \frac{1-x}{x^2-3x-10}$; б) $y = \frac{6x^2 + 55x + 9}{x+9}$

§ 2 Диференціальне числення функції однієї змінної
Таблиця похідних елементарних функцій

| | | | | | |
|----|---|-----|---|-----|---|
| 1. | $(C)' = 0$ | 6. | $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ | 11. | $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| 2. | $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$ | 7. | $(\sin x)' = \cos x$ | 12. | $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| 3. | $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$ | 8. | $(\cos x)' = -\sin x$ | 13. | $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$ |
| 4. | $(e^x)' = e^x$ | 9. | $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ | 14. | $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$ |
| 5. | $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ | 10. | $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ | | |

Правила диференціювання

| № | Правило | Правило |
|----|-----------------------------|---|
| I | $(C \cdot u)' = C \cdot u'$ | III $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$ |
| II | $(u + v)' = u' + v'$ | IV. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$ |

Приклад 1. Знайти похідні функцій:

$$\text{а) } y = x^4 + \frac{1}{x^3} - 2^x - \sin \frac{\pi}{7}; \text{б) } y = (5x^4 - 2) \cdot \sin x; \text{в) } y = \frac{3^x + 4}{\ln x}.$$

Розв'язання. а) Використовуючи правила I та II, формулу 3 отримаємо:

$$\text{Перетворимо } y = x^4 + \frac{1}{x^3} - 2^x - \sin \frac{\pi}{7} = x^4 + x^{-3} - 2^x - \sin \frac{\pi}{7}$$

$$\text{Тоді } y' = (x^4)' + (x^{-3})' - (2^x)' - \left(\sin \frac{\pi}{7}\right)' = 4x^3 - 3x^{-4} - 2^x \ln 2 = 4x^3 - \frac{3}{x^4} - 2^x \ln 2.;$$

б) $y = (5x^4 - 2) \cdot \sin x$. Застосувавши правило III отримаємо:

$$y' = (5x^4 - 2)' \cdot \sin x + (\sin x)' \cdot (5x^4 - 2) = 5 \cdot 4x^3 \cdot \sin x + (\sin x)' \cdot (5x^4 - 2) = 20x^3 \cdot \sin x + (5x^4 - 2) \cdot \cos x.$$

в) $y = \frac{3^x + 4}{\ln x}$. Використовуючи правило IV для диференціювання дроби маємо:

$$y' = \frac{(3^x + 4)' \cdot \ln x - (\ln x)' \cdot (3^x + 4)}{(\ln x)^2} = \frac{3^x \ln 3 \cdot \ln x - \frac{1}{x} \cdot (3^x + 4)}{(\ln x)^2} = \frac{3^x \ln 3 \cdot \ln x - \frac{3^x + 4}{x}}{(\ln x)^2}.$$

Приклад 2. Написати рівняння дотичної та нормалі до кривої $y = x^3 + 4x^2 - 2$ в точці $x_0 = -1$.

Розв'язання. Рівняння дотичної має вигляд $y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, а

рівняння нормалі $y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0)$. Отже для його написання ми повинні

знайти значення функції та її похідної в указаній точці.

$$f(x_0) = f(-1) = (-1)^3 + 4(-1)^2 - 2 = -1 + 4 - 2 = 1;$$

$$f'(x) = (x^3 + 4x^2 - 2)' = 3x^2 + 4 \cdot 2x = 3x^2 + 8x; \quad f'(x_0) = f'(-1) = 3(-1)^2 + 8(-1) = 3 - 8 = -5.$$

Тоді рівняння дотичної матиме вигляд $y = 1 - 5(x + 1)$ або $y = -5x - 4$.

Знаходимо рівняння нормалі: $y = 1 + \frac{1}{-5}(x + 1)$ або $y = -\frac{1}{5}x + \frac{4}{5}$.

Приклад 3. Знайти похідні складених функцій:

$$\text{а) } y = \cos^2(3x - 1); \quad \text{б) } y = \arctg \ln x.$$

Розв'язання. Скористаємось теоремою про похідну складеної функції, а також відповідними правилами диференціювання.

$$\text{а) } y' = (\cos^2(3x - 1))' = 2 \cos(3x - 1) \cdot (\cos(3x - 1))' = 2 \cos(3x - 1) \cdot (-\sin(3x - 1)) \cdot (3x - 1)' = -2 \cos(3x - 1) \sin(3x - 1) \cdot 3 = -3 \sin(6x - 2)$$

б)

$$y' = (\arctg \ln x)' = \frac{1}{1 + (\ln x)^2} \cdot (\ln x)' = \frac{1}{1 + (\ln x)^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x(1 + \ln^2 x)};$$

Приклад 4. Знайти диференціали функцій: а) $y = \sin x$; б) $y = x^2$; в) $y = e^x$.

Розв'язання.

а) $d(\sin x) = \cos x dx$; б) $d(x^2) = 2x dx$; в) $d(e^x) = e^x dx$.

Приклад 5. Тіло рухається за законом $s(t) = \frac{1}{6}t^{12} + 4t^2 - t$ (м). Знайти швидкість та

прискорення тіла через 1 секунду після початку руху.

Розв'язання. Швидкість руху точки дорівнює похідній від шляху:

$$v(t) = s'(t) = \left(\frac{1}{6}t^{12} + 4t^2 - t \right)' = \frac{1}{6} \cdot 12t^{11} + 4 \cdot 2t - 1 = 2t^{11} + 8t - 1,$$

$$v(1) = 2 \cdot 1^{11} + 8 \cdot 1 - 1 = 2 + 8 - 1 = 9 \left(\frac{м}{с} \right).$$

Прискорення руху точки дорівнює похідній від швидкості:

$$a(t) = v'(t) = (2t^{11} + 8t - 1)' = 2 \cdot 11t^{10} + 8 \cdot 1 - 0 = 22t^{10} + 8,$$

$$a(1) = 22 \cdot 1^{10} + 8 = 22 + 8 = 30 \left(\frac{м}{с^2} \right).$$

Приклад 6. Обчислити границі, використовуючи правила Лопіталя:

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$; б) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x^2 - 7x - 15}{3x^2 - 16x + 5}$; в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x + 5}{2x - 100}$; г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 5x^2 - 6x}{2x^2 - 4x + 9}$;

Розв'язання. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin' x}{x'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1$;

б) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x^2 - 7x - 15}{3x^2 - 16x + 5} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(2x^2 - 7x - 15)'}{(3x^2 - 16x + 5)'} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{4x - 7}{6x - 16} = \frac{13}{14}$;

в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x + 5}{2x - 100} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(7x + 5)'}{(2x - 100)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7}{2} = \frac{7}{2}$;

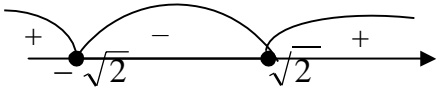
г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 5x^2 - 6x}{2x^2 - 4x + 9} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x^3 + 5x^2 - 6x)'}{(2x^2 - 4x + 9)'} =$
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^2 + 10x - 6}{4x - 4} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(9x^2 + 10x - 6)'}{(4x - 4)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{18x + 10}{4} = \infty$.

Приклад 7 Для функції $y = x^3 - 3x^2$ знайти проміжки монотонності, точки екстремуму та екстремум.

| Коментар | | Розв'язання |
|--|--|---|
| Досліджувати функцію на монотонність та екстремум можна за наступною схемою: | | |
| 1. | Знаходимо область визначення функції | $D(y) = R$ |
| 2. | Знаходимо похідну | $y' = 3x^2 - 6x$ |
| 3. | Знаходимо критичні точки (це ті точки із області визначення, у яких похідна дорівнює 0 або не існує) | $y' = 0$, отже $3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow 3x(x - 2) = 0$ звідси $x_1 = 0, x_2 = 2$ - критичні точки. |

| | | |
|----|---|--|
| 4. | Позначаємо критичні точки на області визначення, визначаємо знак похідної на кожному проміжку і робимо висновки про поведінку функції на кожному проміжку (там де похідна додатна - функція зростає, від'ємна - спадає). |  <p>Отже функція зростає на проміжках $(-\infty; 0)$ і $(2; +\infty)$, а спадає на проміжку $(0; 2)$.</p> |
| 5. | Відносно кожної критичної точки визначити, чи є вона точкою екстремуму і якщо так, то що це за екстремум (якщо при переході через критичну точку похідна змінює знак з «+» на «-», то це точка максимуму, якщо з «-» на «+» - то мінімуму). | У точці 0 похідна змінює знак з «+» на «-», отже це точка максимуму; у точці 2 похідна змінює знак з «-» на «+», отже це точка мінімуму $x_{\max} = 0$; $x_{\min} = 2$. |
| 6. | Обчислюємо значення функції у точках екстремуму, знаходячи тим самим екстремуми функції. | $y_{\max} = y(0) = 0$; $y_{\min} = y(2) = -4$. |

Приклад 8. Знайти проміжки опуклості та точки перегину графіка функції $y = x^4 - 12x^2 + 3x - 22$.

| Коментар | | Розв'язання |
|---|---|--|
| Досліджувати функцію на опуклість донизу та доверху і точки перегину можна за наступною схемою: | | |
| 1. | Знаходимо область визначення функції | $D(y) = R$ |
| 2. | Знаходимо похідну другого порядку | $y' = 4x^3 - 24x + 3$; $y'' = 12x^2 - 24$. |
| 3. | Знаходимо ті точки із області визначення у яких похідна другого порядку дорівнює 0. | $y'' = 0$, тобто $12x^2 - 24 = 0$, звідси $x_1 = -\sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{2}$ $y'' = 12(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})$ |
| 4. | Позначаємо ці точки на області визначення, визначаємо знак похідної другого порядку на кожному проміжку і там де похідна другого порядку додатна графік функції має опуклість направлену донизу, від'ємна - доверху |  <p>Отже графік функції має опуклість направлену донизу, якщо $x \in (-\infty; -\sqrt{2})$ і $(\sqrt{2}; +\infty)$, а догори на проміжку $(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$.</p> |
| 5. | Відносно кожної точки, в якій похідна другого порядку дорівнює 0 визначити, чи є вона точкою перегину (якщо при переході через цю точку похідна | При переході через точки $x_1 = -\sqrt{2}$ і $x_2 = \sqrt{2}$ похідна другого порядку змінює свій знак, отже це точки перегину. |

| | | |
|----|---|---|
| | другого порядку змінює знак, то це точка перегину). | |
| 6. | Обчислюємо значення функції у точках перегину, знаходячи їх ординати. | $y(-\sqrt{2}) = (-\sqrt{2})^4 - 12(-\sqrt{2})^2 + 3(-\sqrt{2}) - 22 = 4 - 24 - 3\sqrt{2} - 22 = -42 - 3\sqrt{2};$ $y(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^4 - 12(\sqrt{2})^2 + 3(\sqrt{2}) - 22 = 4 - 24 + 3\sqrt{2} - 22 = -42 + 3\sqrt{2},$ <p>звідси точки $A(-\sqrt{2}; -42 - 3\sqrt{2})$ та $B(\sqrt{2}; -42 + 3\sqrt{2})$ є точками перегину графіка функції.</p> |

Приклад 9. Знайти рівняння асимптот графіка функції: $y = \frac{x^2}{x-2}$.

Розв'язання. 1) Досліджуємо на похилу асимптоту $y=kx+b$

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x(x-2)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x-2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \frac{2}{x}} = 1;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x-2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - x^2 + 2x}{x-2} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x}{x-2} \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{1 - \frac{2}{x}} = 2. \text{ Тому пряма } y = x + 2 \text{ є похилою асимптотою графіка функції.}$$

2) . Досліджуємо на вертикальні асимптоти

Точка $x=2$ - точка розриву, оскільки в цій точці функція невизначена..

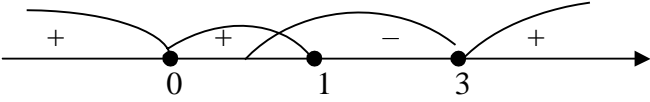
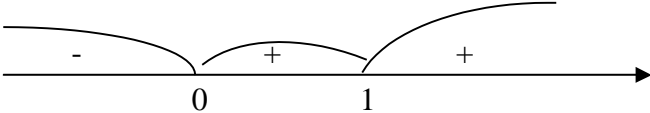
$$\lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{x^2}{x-2} = \left. \begin{array}{l} x \rightarrow 2-0 \\ x < 2 \\ x-2 \rightarrow 0- \\ \frac{x^2}{x-2} \rightarrow -\infty \end{array} \right| = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{x^2}{x-2} = \left. \begin{array}{l} x \rightarrow 2+0 \\ x > 2 \\ x-2 \rightarrow 0+ \\ \frac{x^2}{x-2} \rightarrow +\infty \end{array} \right| = +\infty.$$

Пряма $x=2$ - вертикальна асимптота.

Приклад 10. Дослідити функцію $y = \frac{x^3}{(x-1)^2}$ і побудувати її графік.

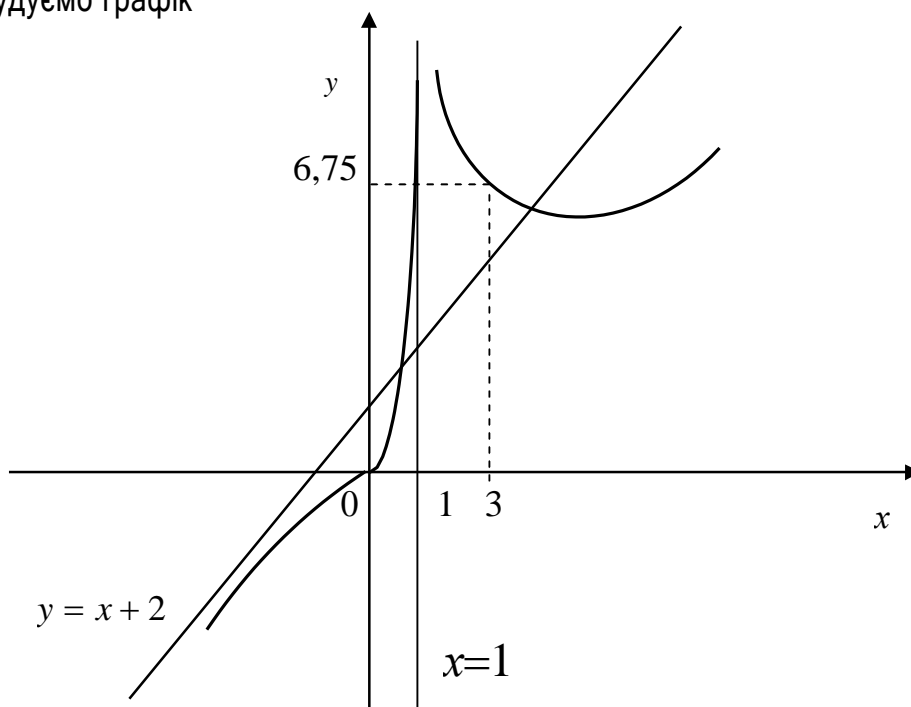
| | Пояснення | Розв'язання |
|----|---|--|
| 1. | Знаходимо область визначення функції. | $D = (-\infty; 1) \cup (1; \infty)$ (В точці $x=1$ знаменник перетворюється в 0). |
| 2. | З'ясуємо, парною чи непарною є дана функція (для парної $f(-x) = f(x)$, для непарної | $f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x-1)^2} = -\frac{x^3}{(x+1)^2}.$ <p>Оскільки $f(-x) \neq f(x)$ і $f(-x) \neq -f(x)$, то функція ні парна ні непарна. Тобто, дана функція є функцією</p> |

| | | |
|----|---|--|
| | $f(-x) = -f(x)$. | загального вигляду. Функція неперіодична. |
| 3. | Знаходимо точки перетину графіка функції з осями координат. | Якщо $x=0$ то $y = \frac{0^3}{(0-1)^2} = 0$. Маємо точку $O(0; 0)$. Якщо $y=0$ то $\frac{x^3}{(x-1)^2} = 0$; $x^3=0$ і $x \neq 1$; $x=0$. |
| 4. | Знаходимо точки підозрілі на розрив та обчислюємо односторонні границі функції в цих точках. | так як в точці $x=1$ $y = \frac{x^3}{(x-1)^2}$ невизначена, то в ній функція має розрив. Оскільки $\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^3}{(x-1)^2} = \frac{x \rightarrow 1-0}{x < 1} \left \begin{array}{l} x-1 \rightarrow 0- \\ (x-1)^2 \rightarrow 0+ \\ x^3 \rightarrow +\infty \\ (x-1)^2 \rightarrow +\infty \end{array} \right. = +\infty$ і $\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x^3}{(x-1)^2} = \frac{x \rightarrow 1+0}{x > 1} \left \begin{array}{l} x-1 \rightarrow 0+ \\ (x-1)^2 \rightarrow 0+ \\ x^3 \rightarrow +\infty \\ (x-1)^2 \rightarrow +\infty \end{array} \right. = +\infty$, то $x=1$ є точкою розриву другого роду. Пряма $x=1$ - вертикальна асимптота. |
| 5. | а) Знаходимо критичні точки функції (це ті точки із області визначення у яких похідна дорівнює 0, або не існує) | $y' = \left(\frac{x^3}{(x-1)^2} \right)' = \frac{(x^3)'(x-1)^2 - ((x-1)^2)' \cdot x^3}{(x-1)^4} =$ $= \frac{3x^2(x-1)^2 - 2x^3(x-1)}{(x-1)^4} =$ $= \frac{x(x-1)(3x-3-2x)}{(x-1)^4} =$ $= \frac{x(x-1)(x-3)}{(x-1)^4} = \frac{x(x-3)}{(x-1)^3}$ $\frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3} = 0; \quad x_2(x-3) = 0 \text{ і } x \neq 1; \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 3$ |
| | б) Позначаємо критичні точки на області визначення, визначаємо знак похідної на кожному | Критичні точки та точка розриву розбивають область визначення на проміжки $(-\infty; 0)$; $(0; 1)$; $(1; 3)$; $(3; \infty)$. Знаходимо знаки похідної на цих проміжках: |

| | | |
|-----------|--|---|
| | <p>проміжку там де похідна додатна функція зростає, від'ємна - спадає).</p> |  <p>Отже, функція зростає на проміжках $(-\infty; 0)$, $(0; 1)$ і $(3; \infty)$, спадає на проміжку $(1; 3)$.</p> |
| | <p>в) Відносно кожної критичної точки визначити, чи є вона точкою екстремуму і якщо так, то що це за екстремум.</p> | <p>В точці $x = 3$ функція має мінімум, $y_{\min} = y(3) = \frac{3^3}{(3-1)^2} = \frac{27}{4} = 6,75$. Маємо точку $C(3; 6,75)$. Точка $x = 1$ не належить області визначення, тому не може бути точкою екстремуму, а при переході через критичну точку $x = 0$ функція не змінює свій знак.</p> |
| <p>6.</p> | <p>Друга похідна і дослідження функції на опуклість графіка функції (там де похідна другого порядку додатна графік функції має опуклість направлену донизу, від'ємна - доверху і якщо при переході через точку похідна другого порядку змінює знак, то це точка перегину).</p> | $y' = \left(\frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3} \right)' = \left(\frac{x^3 - 3x^2}{(x-1)^3} \right)' =$ $= \frac{(x^3 - 3x^2)' \cdot (x-1)^3 - ((x-1)^3)' \cdot (x^3 - 3x^2)}{(x-1)^6} =$ $= \frac{(3x^2 - 6x) \cdot (x-1)^3 - 3(x-1)^2 \cdot (x^3 - 3x^2)}{(x-1)^6} =$ $= \frac{6x}{(x-1)^4}$ <p>Прирівнюємо другу похідну до нуля: $\frac{6x}{(x-1)^4} = 0 \Rightarrow 6x = 0$ і $x \neq 1; x = 0$.</p> <p>Отримані точки розбивають область визначення на проміжки $(-\infty; 0)$; $(0; 1)$; $(1; \infty)$. Знаходимо знаки другої похідної на цих проміжках:</p>  <p>Отже, графік функції має опуклість направлену догори на проміжку $(-\infty; 0)$, а на проміжках $(0; 1)$; $(1; \infty)$ – донизу. Точка $x = 0$ є абсцисою точки перегину $y(0) = \frac{0^3}{(0-1)^2} = \frac{0}{1} = 0$. Точка $O(0; 0)$ – точка перегину графіка функції.</p> |

| | |
|--|--|
| <p>6. Похилі асимптоти графіка функції. Похила асимптота графіка функції існує тоді і тільки тоді, коли існують дві скінченні границі</p> $k = \lim_{\delta \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{та}$ $b = \lim_{\delta \rightarrow \infty} (f(x) - kx)$ <p>причому у випадку, якщо $k=0$ це буде горизонтальна асимптота, як частинний випадок похилої.</p> | <p>Дослідимо чи графік має похилу асимптоту $y = kx + b$:</p> $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 - 2x + 1} =$ $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{2x}{x^2} + \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1 - 0 + 0} = 1;$ $b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{(x-1)^2} - x \right) =$ $= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 - x(x-1)^2}{(x-1)^2} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 - x^3 + 2x^2 - x}{(x-1)^2} \right) =$ $= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 - x}{x^2 - 2x + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^2}{x} - \frac{x}{x}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{2x}{x^2} + \frac{1}{x^2}} =$ $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{x}}{1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{2 - 0}{1 - 0 + 0} = 2$ <p>Отже, $y = x + 2$ - похила асимптота.</p> |
|--|--|

8. Будуємо графік



Приклад 11. Знайти найбільше та найменше значення функції $y = 3x^4 + 4x^3 - 24x^2 - 48x + 17$ на проміжку $[-3; 0]$.

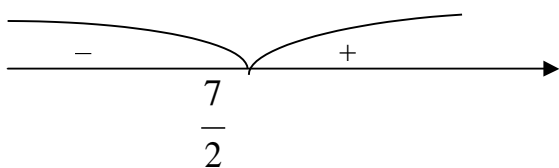
| Схема | | Розв'язання |
|-------|---|---|
| 1. | Знаходимо критичні точки функції (це ті точки з області визначення в яких похідна дорівнює 0. або не існує) і вибираємо ті із них, які належать вказаному відрізку. | Знайдемо похідну $y' = 12x^3 + 12x^2 - 48x - 48.$ Прирівняємо її до нуля $12x^3 + 12x^2 - 48x - 48 = 0 \Rightarrow 12(x^2(x+1) - 4(x+1) = 0) \Rightarrow (x+1)(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow (x+1)(x+2)(x-2) = 0$, отже маємо три критичні точки $x_1 = -2$; $x_2 = -1$ та $x_3 = 2$. Із них проміжку $[-3;0]$ належать лише дві $x_1 = -2$ і $x_2 = -1$. |
| 2. | Обчислюємо значення функції у критичних точках та на кінцях відрізку. | $y(-3) = 3(-3)^4 + 4(-3)^3 - 24(-3)^2 - 48(-3) + 17 = 80$ $y(-2) = 3(-2)^4 + 4(-2)^3 - 24(-2)^2 - 48(-2) + 17 = 33$ $y(-1) = 3(-1)^4 + 4(-1)^3 - 24(-1)^2 - 48(-1) + 17 = 40$ $y(0) = 3 \cdot 0^4 + 4 \cdot 0^3 - 24 \cdot 0^2 - 48 \cdot 0 + 17 = 17$ |
| 3. | Серед знайдених значень вибрати найбільше і найменше значення. | $y_{\text{найбільше}} = y(-3) = 80$; $y_{\text{найменше}} = y(0) = 17$ |

Приклад 12. Якими мають бути розміри ящика з кришкою місткістю $V = 1764 \text{ см}^3$, якщо сторони основи відносяться як 3:4, щоб на його виготовлення пішла найменша кількість матеріалу?

Так як сторони основи відносяться як 3:4 то нехай $a = 3x$, $b = 4x$, тоді знаючи, що $V = abh$ знайдемо $h = \frac{V}{ab}$, тобто $h = \frac{1764}{12x^2}$. На виготовлення ящика буде витрачено найменшу кількість матеріалу, якщо площа повної поверхні ящика буде найменшою.

Знайдемо цю площу: $S = 2 \cdot 12x^2 + 2 \cdot 3x \cdot \frac{1764}{12x^2} + 2 \cdot 4x \cdot \frac{1764}{12x^2} = 24x^2 + \frac{882}{x} + \frac{1176}{x} = 24x^2 + \frac{2058}{x}$. Дослідимо функцію $S(x) = 24x^2 + \frac{2058}{x}$ на найменше значення. Знайдемо похідну $S'(x) = 48x - \frac{2058}{x^2}$. Відшукаємо стаціонарні точки цієї функції $S'(x) = 0 \Rightarrow \frac{48x^3 - 2058}{x^2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 48x^3 - 2058 = 0 \\ x^2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{2058}{48} \Rightarrow x = \frac{7}{2}$.

Перевіримо, чи являється знайдена критична точка точкою екстремуму і якщо так, то що це за екстремум.



Тобто знайдена точка є точкою мінімуму.

Отже, якщо одна сторона основи $a = 3x = 3 \cdot \frac{7}{2} = 10.5 \text{ см}$, а друга

$b = 4x = 4 \cdot \frac{7}{2} = 14$ см і висота $h = \frac{1764}{12x^2} = 12$ см, то на виготовлення цього ящика буде витрачено мінімум матеріалу.

Завдання для самостійної роботи

Завдання 1. Знайти похідну функції:

- | | |
|---|---|
| 1) $y = 2x^{10} + \sin x - 7$; | 2) $y = 2 \lg x - x^7 + 6$; |
| 3) $y = 9 - x^4 + 8 \operatorname{arctg} x$; | 4) $y = 7x^5 + 5^x - 2$; |
| 5) $y = x^2 + 3 \cos x - 4$; | 6) $y = 5 + x^4 + 4 \sin x$; |
| 7) $y = \ln x + 5x^{20} + 45$; | 8) $y = x^{11} + 3 \arcsin x - 59$; |
| 9) $y = 4^x + 2x^{10} + 84$; | 10) $y = 12 - 7x^3 + \cos x$; |
| 11) $y = 3 - 2x^4 + \operatorname{tg} x$; | 12) $y = -5x + 7^x - 9$; |
| 13) $y = 24x^2 + e^x - 8$; | 14) $y = \log_5 x - 4x^3 + 28$; |
| 15) $y = 4 \operatorname{ctg} x - x^9 + 42$; | 16) $y = 8 \arccos x + x^6 + 23$; |
| 17) $y = 16 - 3x^{10} + \ln x$; | 18) $y = 3^x - 15x^4 + 19$; |
| 19) $y = \log_4 x - 17 + 12x^5$; | 20) $y = 9 \operatorname{tg} x - x^{19} + 25$; |
| 21) $y = 14 - 3x^{15} + \cos x$; | 22) $y = 12e^x + x^{30} - 0.25$; |
| 23) $y = \operatorname{ctg} x - 14x + 14$; | 24) $y = 4x^{\frac{1}{2}} + \sin x - 16$; |
| 25) $y = 9^x - 16x^3 + 12$; | 26) $y = \log_{11} x + 13 - 3x^{24}$; |
| 27) $y = 9 + 18x^{\frac{1}{3}} + \arcsin x$; | 28) $y = 87e^x - x + 1.9$; |
| 29) $y = 3 \ln x + x^{18} + \frac{5}{7}$; | 30) $y = 2^x - 56x^2 + 0.5$. |

Завдання 2. Знайти похідну функції:

- | | | |
|--|--|---|
| 1) $y = (x^2 - 2) \operatorname{tg} x$; | 2) $y = x^2 \sin x$; | 3) $y = (2 - x^2) \cos x$; |
| 4) $y = (3x - 2) \operatorname{ctg} x$; | 5) $y = 2\sqrt{x} \arcsin x$; | 6) $y = 5x^7 \cos x$; |
| 7) $y = 5^x \operatorname{ctg} x$; | 8) $y = 3x^8 \sin x$; | 9) $y = \sin x \arccos x$; |
| 10) $y = (\sqrt[5]{x^3} - 1) \operatorname{arctg} x$; | 11) $y = 5^x (x^5 - 10x)$; | 12) $y = x^4 \log_4 x$; |
| 13) $y = 6^x \operatorname{arctg} x$; | 14) $y = \ln x \operatorname{arctg} x$; | 15) $y = (\ln x - \log_2 x) \sqrt{x}$; |
| 16) $y = e^x (x^2 + \sqrt{x})$; | 17) $y = (\cos x - 2^x) \sin x$; | 18) $y = (3 \sin x + \cos x) \operatorname{tg} x$; |
| 19) $y = e^x (x^2 + 2x + 2)$; | 20) $y = 3x^3 \ln x$; | 21) $y = 2^x \arcsin x$; |
| 22) $y = \operatorname{tg} x \ln x$; | 23) $y = (\log_3 x + 3) \sqrt[3]{x}$; | 24) $y = \operatorname{tg} x (e^x - x)$; |
| 25) $y = (x^5 + \ln x) e^x$; | 26) $y = (\sin x + 1) \lg x$; | 27) $y = (x - \operatorname{arccot} x) 5^x$; |
| 28) $y = (\operatorname{ctg} x - 1) \sqrt[9]{x^7}$; | 29) $y = (1 + \sin x) \cos x$; | 30) $y = 4 \cos x (\operatorname{tg} x - 2x)$. |

Завдання 3. Знайти похідні функцій:

- | | | |
|--|---|--|
| 1) $y = \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}$; | 2) $y = \frac{x^2 + 2x}{x + 5}$; | 3) $y = \frac{3x - x^2}{1 - 3x}$; |
| 4) $y = \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2 + 5}$; | 5) $y = \frac{x^2}{4x^2 + 2}$; | 6) $y = \frac{1}{\ln x}$; |
| 7) $y = \frac{\sin x}{1 - \cos x}$; | 8) $y = \frac{x^2 + 2}{2x + 4}$; | 9) $y = \frac{8x^2 + 2}{x}$; |
| 10) $y = \frac{32 - 2x^2}{x^2}$; | 11) $y = \frac{x^2 + 4x}{2x - x^4 + 1}$; | 12) $y = \frac{243x - 2x^3}{x^3 - 2x^2 + 3}$; |
| 13) $y = \frac{27 + 8x^2}{x}$; | 14) $y = \frac{1 + \ln x}{x}$; | 15) $y = \frac{x^2 - 4x + 3}{\cos x}$; |
| 16) $y = \frac{3x + x^2}{5x + x^3}$; | 17) $y = \frac{x^3}{\ln^2 x}$; | 18) $y = \frac{2x + 1}{\sqrt{x}}$; |
| 19) $y = \frac{2\sqrt{x}}{x - 4}$; | 20) $y = \frac{1 + x^3}{1 - x}$; | 24) $y = \frac{1 - x}{x + 1}$; |
| 22) $y = \frac{x^2 - x + 4}{x - 1}$; | 26) $y = \frac{x - \sin x}{\sqrt{x}}$; | 27) $y = \frac{3 - \cos x}{2 \sin x}$; |
| 25) $y = \frac{x^5 - 2}{x + 2}$; | 29) $y = \frac{-5 \sin x}{\sqrt{x}}$; | 30) $y = \frac{\operatorname{ctg} x}{2\sqrt{x}}$. |

Завдання 4. Написати рівняння дотичної та нормалі до кривої в точці $x_0 = \pi$:

- | | | |
|---|---|--|
| 1) $y = x^2 + 4x - 2$, при $\pi = 1$; | 2) $y = \frac{1 - x}{x + 4}$, при $\pi = -3$; | 3) $y = x^3 + \sqrt{x}$, при $\pi = 4$; |
| 4) $y = x^3 + 2\sqrt{x}$, при $\pi = 4$; | 5) $y = 2 - 4x - 3x^2$, при $\pi = -2$; | 6) $y = \frac{2 + x}{3 - x}$, при $\pi = 2$; |
| 7) $y = \frac{x - 3}{4 - x}$, при $\pi = 3$; | 8) $y = \frac{2 - x}{3 + x}$, при $\pi = -4$; | 9) $y = \frac{3 - x}{x + 4}$, при $\pi = -3$; |
| 10) $y = \frac{2 + x}{3 + x}$, при $\pi = -2$; | 11) $y = \frac{1 + x}{x + 2}$, при $\pi = -1$; | 12) $y = \frac{x^2}{x + 1}$, при $\pi = 1$; |
| 13) $y = \frac{x}{x + 1} + \frac{1}{x}$, при $\pi = 1$; | 14) $y = \frac{\sin x}{\cos x + 1}$, при $\pi = 0$; | 15) $y = \frac{x^2 + 1}{x^3}$, при $\pi = -1$; |
| 16) $y = \frac{x^2 + 5}{x - 2}$, при $\pi = 3$; | 17) $y = \frac{x^2 - 3}{x + 2}$, при $\pi = -3$; | 18) $y = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 3}$, при $\pi = 4$; |
| 19) $y = \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 3}$, при $\pi = -4$; | 20) $y = 2x^2 + \frac{1}{3}x^3$, при $\pi = 3$; | 21) $y = \frac{x - 1}{x + 1}$, при $\pi = -2$; |
| 22) $y = \frac{1 + x}{x - 1}$, при $\pi = 2$; | 23) $y = \frac{x^2 - 1}{x}$, при $\pi = -2$; | 24) $y = \frac{x^2 + 1}{x}$, при $\pi = 2$; |
| 25) $y = \frac{x^2 - 3}{x - 2}$, при $\pi = 3$; | 26) $y = \frac{x^2 + 3}{x + 1}$, при $\pi = -2$; | 27) $y = \frac{x^2 - 3x}{x + 1}$, при $\pi = -3$; |
| 28) $y = \frac{x^2 + 3x}{x - 1}$, при $\pi = 2$; | 29) $y = \frac{5x^2 - 4}{x - 3}$, при $\pi = 4$; | 30) $y = \frac{4x^2 + 3}{x - 4}$, при $\pi = 5$. |

Завдання 5. Тіло рухається за законом $S(t)$. Знайти швидкість та прискорення тіла через $t = t_1$ с після початку руху. (S вимірюється в метрах).

1) $S(t) = \frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{3}t^3 - 7t + 2$, 2) $S(t) = \frac{1}{5}t^5 + \frac{1}{3}t^3 + 20t - 3$, 3) $S(t) = \frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{12}t^2 + 7t$,

при $t_1 = 2$ с; при $t_1 = 2$ с; при $t_1 = 2$ с;
4) $S(t) = \frac{1}{5}t^5 + \frac{1}{3}t^3 - 2t$, 5) $S(t) = -\frac{3}{4}t^4 - \frac{1}{3}t^3 + t^2 + 2$, 6) $S(t) = \frac{1}{2}t^4 - \frac{5}{3}t^3 - 1,5t^2 + 2$,

при $t_1 = 3$ с; при $t_1 = 3$ с; при $t_1 = 2$ с;
7) $S(t) = \frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{4}t^3 + \frac{1}{2}t + 2$, 8) $S(t) = \frac{5t^2}{3} + 2t - \frac{7t}{2} + 3$, 9) $S(t) = t + \frac{5t^2}{2} - 4t + 3$,

при $t_1 = 3$ с; при $t_1 = 1$ с; при $t_1 = 2$ с;
10) $S(t) = 2t^3 - \frac{5t^2}{2}3t + 1$, 11) $S(t) = t^3 - \frac{3t^2}{2} + 2t - 1$, 12) $S(t) = t^3 + 2t^2 + 5t - 1$,

при $t_1 = 1$ с; при $t_1 = 3$ с; при $t_1 = 2$ с;
13) $S(t) = \frac{t^4}{4} - \frac{t^3}{3} + 2t^2 + 3$, 14) $S(t) = -\frac{1}{3}t^3 + \frac{t^2}{2} - 4t + 5$, 15) $S(t) = \frac{2}{3}t^3 - \frac{5t^2}{4} + 7t + 4$,

при $t_1 = 2$ с; при $t_1 = 3$ с; при $t_1 = 2$ с;
16) $S(t) = \frac{2}{9}t^3 + \frac{t^2}{4} - 3t + 3$, 17) $S(t) = 2t^3 - \frac{5t^2}{8} + 4t + 3$, 18) $S(t) = 2t^3 + \frac{5t^2}{2} - 7t + 3$,

при $t_1 = 6$ с; при $t_1 = 2$ с; при $t_1 = 1$ с;
19) $S(t) = 2t^3 + \frac{5t^2}{2} - 7t + 3$, 20) $S(t) = 4t^3 - \frac{5t^2}{4} - 5t + 2$, 21) $S(t) = \frac{t^3}{9} + \frac{5t^2}{6} - 9t + 27$,

при $t_1 = 1$ с; при $t_1 = 2$ с; при $t_1 = 3$ с;
22) $S(t) = \frac{2}{3}t^3 + t + 3$, 23) $S(t) = \frac{1}{8}t^3 + \frac{1t^2}{2} + 2t + 3$, 24) $S(t) = \frac{3}{16}t^3 - \frac{5t^2}{4} + 9t - 15$,

при $t_1 = 6$ с; при $t_1 = 5$ с; при $t_1 = 4$ с;
25) $S(t) = 4t^3 - \frac{5t^2}{8} + 6t + 9$, 26) $S(t) = \frac{t^3}{6} - \frac{5t^2}{9} - 2t + 14$, 27) $S(t) = \frac{1}{3}t^3 - \frac{5t^2}{2} + 2t + 1$,

при $t_1 = 4$ с; при $t_1 = 6$ с; при $t_1 = 9$ с;
28) $S(t) = -\frac{1}{4}t^4 + \frac{7t^3}{2} + t^2$, 29) $S(t) = \frac{2}{25}t^3 + \frac{3}{5}t^2 - 2t$, 30) $S(t) = 8t^4 - \frac{3t^2}{4} + 5t - 7$,

при $t_1 = 2$ с; при $t_1 = 5$ с; при $t_1 = 2$ с.

Завдання 6. Знайти похідну складеної функції:

- | | | |
|------------------------------|--------------------------------------|--|
| 1) $y = 3^{\sin 6x}$; | 2) $y = 7^{x^2+2x}$; | 3) $y = 2^{\sin 2x}$; |
| 4) $y = 3^{\cos^2 4x}$; | 5) $y = 8^{\sin 2x}$; | 6) $y = 10^{5-3x^3}$; |
| 7) $y = e^{\sin^2 x}$; | 8) $y = 3^{\operatorname{ctg} 7x}$; | 9) $y = 6^{\sin 3x}$; |
| 10) $y = 2^{x^3-5x+4}$; | 11) $y = e^{\sqrt[4]{x^3}}$; | 12) $y = e^{\arccos 5x}$; |
| 13) $y = 5^{\sin 8x}$; | 14) $y = 5^{x^3-3x^2+2x}$; | 15) $y = 2^{\operatorname{tg}^{-1} x}$; |
| 16) $y = e^{\sqrt{\ln x}}$; | 17) $y = 2^{\sin 9x}$; | 18) $y = 15^{8-2x^7}$; |

19) $y = 2^{\cos 5x}$;

20) $y = e^{\cos^2 x}$;

21) $y = 4^{\sin 7x}$;

22) $y = e^{5x^3}$;

23) $y = 2^{x^4+5x^3-7x}$;

24) $y = 2^{\operatorname{ctg} x}$;

25) $y = 6^{\sin 4x}$;

26) $y = e^{\arcsin 7x}$;

27) $y = e^{\cos^2 x}$;

28) $y = 4^{5x^3-4x^2+10x}$;

29) $y = 7^{\sin 3x}$;

30) $y = 2^{\cos 9x}$.

Завдання 7. Знайти диференціал функції:

1) $y = 7^{x^2+2x}$;

2) $y = 2^{\cos 9x} \operatorname{ctg} 9x + x^{12}$

3) $y = 4^{5x^3-4x^2+10x}$;

4) $y = 8^{\sin 2x} \operatorname{tg} 2x$;

5) $y = e^{\cos^2 x}$;

6) $y = 6^{\sin 4x} \operatorname{tg} 4x$;

7) $y = 3^{\operatorname{ctg} 7x} \sin 7x$;

8) $y = 2^{\frac{1}{x}} + 3x^7$;

9) $y = e^{5\sqrt{x^2}} + 6$;

10) $y = e^{\sqrt[4]{x^3}}$;

11) $y = 4^{\sin 7x} \operatorname{tg} 7x$;

12) $y = 2^{\cos 5x} - 7x^4$;

13) $y = 5^{x^3-3x^2+2x}$;

14) $y = 15^{8-2x^7}$;

15) $y = e^{\sqrt{\ln x}}$;

16) $y = 2^{\sin 9x} \operatorname{tg} 9x - 2x^2$;

17) $y = 2^{\operatorname{tg} \frac{1}{x}}$;

18) $y = 5^{\sin 8x} \operatorname{tg} 8x + 9x$;

19) $y = e^{\cos^2 x}$;

20) $y = e^{\arccos 5x}$;

21) $y = 2^{\sin^2 \frac{1}{x}}$;

22) $y = 2^{x^4+5x^3-7x}$;

23) $y = 6^{\sin 3x} \operatorname{tg} 3x$;

24) $y = e^{\sin^2 x}$;

25) $y = e^{\arcsin 7x}$;

26) $y = 10^{5-3x^3}$;

27) $y = 3^{\cos^2 4x}$;

28) $y = 7^{\sin 3x} \operatorname{tg} 3x$;

29) $y = 2^{\sin 2x} + 4x^2$;

30) $y = 3^{\sin 6x} \operatorname{tg} 6x$.

Завдання 8. Знайти границю, використовуючи правила Лопіталю:

1) а) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 + x - 6}$;

б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 17x}{\operatorname{tg} 5x}$;

2) а) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 3x - 18}{x^2 + 2x - 15}$;

б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 4x}{\operatorname{tg} x}$;

3) а) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 3x - 2}{x^2 - x - 2}$;

б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{\sin 8x}$;

4) а) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{3x^2 - 6x - 9}$;

б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\operatorname{tg} 8x}$;

5) а) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 + 4x - 5}$;

б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 15x}$;

6) а) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 5x - 6}$;

б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 3x}$;

7) а) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 5x - 6}{x^2 + 4x - 5}$;

б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{tg} 6x}$;

8) а) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^2 - 6x + 1}{2x^2 + 3x - 5}$;

б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 4x}{\sin 6x}$;

| | | | |
|--|---|--|---|
| 9) a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 4x - 12}{x^2 + 2x - 8};$ | б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 14x}{x};$ | 10) a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 3x - 2}{x^2 + x - 6};$ | б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 8x}{\operatorname{tg} 6x};$ |
| 11) a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 2x - 15}{x^2 + 3x - 18};$ | б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{9x};$ | 12) a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 2x - 15}{x^2 + x - 12};$ | б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 4x}{\operatorname{tg} 9x};$ |
| 13) a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 7x - 8}{x^2 + 4x - 5};$ | б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 8x}{9x};$ | 14) a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + x - 12};$ | б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 5x};$ |
| 15) a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2 + 5x - 9}{5x^2 - 4x - 1};$ | б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 9x};$ | 16) a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 7x - 6}{2x^2 - 5x - 3};$ | б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 7x}{\operatorname{tg} 8x};$ |
| 17) a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{7x^2 - 3x - 4}{10x^2 + 2x - 12};$ | б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{3x};$ | 18) a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 4x + 1}{2x^2 + 6x - 8};$ | б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 4x}{\sin x};$ |
| 19) a) $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{2x^2 + 14x + 20}{3x^2 + 14x - 5};$ | б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{5x};$ | 20) a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{2x^2 - x - 6};$ | б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 4x}{\operatorname{tg} 3x};$ |
| 21) a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 3x - 2}{x^2 + 2x - 8};$ | б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 8x}{\operatorname{tg} 6x};$ | 22) a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^2 - 6x + 1}{2x^2 + 3x - 5};$ | б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 4x}{\operatorname{tg} 10x};$ |
| 23) a) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^2 - 11x - 4}{16 - x^2};$ | б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 8x}{\operatorname{tg} 6x};$ | 24) a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 2x - 15}{x^2 + x - 12};$ | б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 9x}{\operatorname{tg} x};$ |
| 25) a) $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{2x^2 + 7x - 15}{6x^2 + 30x};$ | б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 8x}{\operatorname{tg} 6x};$ | 26) a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + 2x - 5}{6x^2 - x - 5};$ | б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 8x}{\operatorname{tg} x};$ |

Завдання 9. Знайти проміжки монотонності, екстремуми функції, проміжки опуклості графіка функції, точки його перегину.:

| | | |
|--------------------------------|---------------------------------|-------------------------------|
| 1) $y = x^3 - 12x + 11;$ | 2) $y = -x^3 - x;$ | 3) $y = x^4 - 2x^3 - 3;$ |
| 4) $y = -x^3 - 4x^2 - 4x;$ | 5) $y = x^3 + x;$ | 6) $y = -x^4 + 5x^2 - 4;$ |
| 7) $y = -x^3 + 3x^2 - 2;$ | 8) $y = x^3 - 4x + 3;$ | 9) $y = x^3 + 3x^2 - 4;$ |
| 10) $y = \frac{x^4}{4} - x^3;$ | 11) $y = -\frac{x^4}{4} + x^3;$ | 12) $y = \frac{x^3}{3} - 4x;$ |
| 13) $y = -x^4 - 2x^2 + 3;$ | 14) $y = x^3 - 4x^2 + 4x;$ | 15) $y = x^3 - 3x^2 + 2;$ |

| | | |
|--|---------------------------------|---------------------------------|
| 16) $y = \frac{x^3}{3} - x^2 + x - \frac{1}{3};$ | 17) $y = x^3 - x;$ | 18) $y = 3x^4 - 4x^3;$ |
| 19) $y = x^3 + 3x^2 - 2;$ | 20) $y = x^3 - 6x^2 + 9x;$ | 21) $y = x^3 + 6x^2 + 9x;$ |
| 22) $y = \frac{x^3}{3} + 4x;$ | 23) $y = \frac{x^4}{4} - 2x^2;$ | 24) $y = \frac{3x^4}{4} - x^3;$ |
| 25) $y = -x^4 + 6x^2 - 5;$ | 26) $y = -3x^4 + 4x^3;$ | 27) $y = -x^3 + 3x^2;$ |
| 28) $y = x^4 + 2x^3 - 3;$ | 29) $y = -x^3 - x;$ | 30) $y = x^4 - 10x^2 + 9.$ |

Завдання 10. Знайти асимптоти графіка функції:

| | | |
|------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1) $y = \frac{4x^2}{4+x};$ | 2) $y = \frac{x^4 - 3}{x^3};$ | 3) $y = \frac{x^2 + 2}{(x-4)^2};$ |
| 4) $y = \frac{x^2}{x^2 - 9};$ | 5) $y = \frac{2x^3}{x^2 + 9};$ | 6) $y = \frac{4x^3 - 12}{(x-2)^2};$ |
| 7) $y = \frac{8}{x^2 - 4};$ | 8) $y = \frac{4x^3}{1-x^2};$ | 9) $y = \frac{2x^2}{x-8};$ |
| 10) $y = \frac{x}{x^2 - 4};$ | 11) $y = \frac{4-x^2}{x^2 + 4};$ | 12) $y = \frac{x^2 + x - 5}{x-2};$ |
| 13) $y = \frac{(x+2)^2}{x^2 + 4};$ | 14) $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x-1};$ | 15) $y = \frac{x^2}{x^3 - 1};$ |
| 16) $y = \frac{x^2}{x+1};$ | 17) $y = \frac{x}{x-2};$ | 18) $y = \frac{x^2}{x+1};$ |
| 19) $y = \frac{9x^3}{x^2 + 9};$ | 20) $y = \frac{x^2 + 5x}{x-4};$ | 21) $y = \frac{x^2}{x-2};$ |
| 22) $y = \frac{x+3}{x^2 - 4};$ | 23) $y = \frac{x+2}{x^2 - 1};$ | 24) $y = \frac{x^2 + 2x}{x-1};$ |
| 25) $y = \frac{(x+3)^2}{x^2 + 9};$ | 26) $y = \frac{(x+2)^2}{x-2};$ | 27) $y = \frac{1}{x^2 - 4};$ |
| 28) $y = \frac{x^2 - 2x}{x-1};$ | 29) $y = \frac{x^2 - 5x}{x+4};$ | 30) $y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1};$ |

Завдання 11. Дослідити функцію і побудувати її графік:

| | |
|---|--|
| 1) а) $y = x^4 - 18x^2 + 32;$ | б) $y = \frac{x^3}{x^2 + 1};$ |
| 2) а) $y = 2x^3 - 3x^2;$ $(x^2 - 4)^2$ | б) $y = \frac{2x}{x^3 - 8};$ $4x^3$ |
| 3) а) $y = \frac{\quad}{8};$ | б) $y = \frac{\quad}{1-x^2};$ $9-x^2$ |
| 4) а) $y = x^4 - 4x^2 - 5;$ | б) $y = \frac{\quad}{x^2 + 9};$ |

- | | | | | |
|-----|----|--|----|-----------------------------------|
| 5) | a) | $y = x^3 - 3x;$ | б) | $y = \frac{x^2 + 6}{x^2 - 1};$ |
| 6) | a) | $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2;$ | б) | $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1};$ |
| 7) | a) | $y = 2x^3 + 9x^2 + 12x;$ | б) | $y = \frac{x^2}{x - 3};$ |
| 8) | a) | $y = x^4 - 2x^2 + 3;$ | б) | $y = \frac{x^2 + 5x}{x - 4};$ |
| 9) | a) | $y = 4x^3 + 2x^2;$ | б) | $y = \frac{x + 2}{x^2 - 1};$ |
| 10) | a) | $y = x^3 + 6x^2 + 9x;$ | б) | $y = \frac{x^2 - 5x}{x + 4};$ |
| 11) | a) | $y = (x - 1)^2(x + 5);$ | б) | $y = \frac{x^2}{2(x - 1)};$ |
| 12) | a) | $y = \frac{x^4}{2} - x^2 + 3;$ | б) | $y = \frac{x^2}{x^2 - 9};$ |
| 13) | a) | $y = x^3 - 75x;$ | б) | $y = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4};$ |
| 14) | a) | $y = \frac{(x^2 - 5)^3}{125};$ | б) | $y = \frac{x}{x^2 - 4};$ |
| 15) | a) | $y = x^3 - 12x;$ | б) | $y = \frac{(x + 2)^2}{5x + 4};$ |
| 16) | a) | $y = 1 + x^2 - \frac{x^4}{2};$ | б) | $y = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 4};$ |
| 17) | a) | $y = 3x^4 - 12x^3;$ | б) | $y = \frac{x^2}{x + 1};$ |
| 18) | a) | $y = x^3 - 6x^2 + 9x;$ | б) | $y = \frac{x^2 - 4}{2x + 1};$ |
| 19) | a) | $y = 4x^5 - 5x^4;$ | б) | $y = \frac{x + 3}{x^2 - 4};$ |
| 20) | a) | $y = x^4 - 10x^2 + 9;$ | б) | $y = \frac{x^2 - 2x}{x - 1};$ |
| 21) | a) | $y = x^3 - 3x^2;$ | б) | $y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1};$ |
| 22) | a) | $y = 2x^4 - 4x^2;$ | б) | $y = \frac{x^2 + 2x}{x - 1};$ |
| 23) | a) | $y = x^3 - 27x;$ | б) | $y = \frac{x^2}{x^2 + 2};$ |
| 24) | a) | $y = x^4 - 2x^2 - 3;$ | б) | $y = \frac{x^2 - 2}{(x - 4)^2};$ |

| | | | |
|--------|-----------------------------|----|----------------------------------|
| 25) a) | $y = x^3 + 3x^2 - 9x;$ | б) | $y = \frac{x^3}{x^2 - 1};$ |
| 26) a) | $y = 3x - x^3;$ | б) | $y = \frac{2x^2}{x + 1};$ |
| 27) a) | $y = \frac{x^4}{4} - 2x^2;$ | б) | $y = \frac{x^2 + x - 5}{x - 2};$ |
| 28) a) | $y = x^3 + x^2;$ | б) | $y = \frac{(x + 2)^2}{x - 2};$ |
| 29) a) | $y = x^4 - 5x^2 + 4;$ | б) | $y = \frac{x^2}{x^3 - 1};$ |
| 30) a) | $y = x^3 - 9x;$ | б) | $y = \frac{x^2}{x + 1};$ |

Завдання 12.. Знайти найбільше та найменше значення функції на даному проміжку:

| | | | |
|----|--|----|--|
| 1 | $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 7; [-2; 2];$ | 16 | $y = -4x^3 + 9x^2 - 6x + 10; [0; 2];$ |
| 2 | $y = -\frac{2}{3}x^3 + x^2 + 4x - 3; [-1; 1];$ | 17 | $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 12; [-4; 0];$ |
| 3 | $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 4; [0; 2];$ | 18 | $y = -\frac{1}{3}x^3 + x - 6; [0; 3];$ |
| 4 | $y = -8x^3 - 12x^2 + 5; [-2; 0];$ | 19 | $y = x^3 - 6x^2 + 25; [-2; 0];$ |
| 5 | $y = x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 9; [0; 2];$ | 20 | $y = -2x^3 + x^2 + 8x + \frac{1}{3}; [0; 3];$ |
| 6 | $y = -\frac{1}{2}x^3 - 3x^2 - 2; [-3; 2];$ | 21 | $y = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - 3x + 2; [-3; 3];$ |
| 7 | $y = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 3; [-3; 0];$ | 22 | $y = -\frac{1}{5}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 4; [0; 1];$ |
| 8 | $y = -x^3 + x^2 + 8x + \frac{1}{2}; [-3; 3];$ | 23 | $y = 3x^3 - x - 2; [0; 2];$ |
| 9 | $y = 4x^3 - 2x^2 - 8x + 1; [0; 3];$ | 24 | $y = x^3 + 6x^2 + 9x; [-2; 2];$ |
| 10 | $y = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{5}{4}x^2 - 7; [-2; 2];$ | 25 | $y = \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 1; [-1; 1];$ |

| | | | | | |
|----|--|-------------|----|---|------------|
| 11 | $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 15x;$ | $[-5; 0];$ | 26 | $y = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{2}x + 2;$ | $[0; 2];$ |
| 12 | $y = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{2}x + 2;$ | $[0; 2];$ | 27 | $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 15x;$ | $[-5; 0];$ |
| 13 | $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - \frac{4}{3};$ | $[-3; -1];$ | 28 | $y = -\frac{1}{27}x^3 + x;$ | $[0; 2];$ |
| 14 | $y = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{9}{8}x^2 + 3x - 6;$ | $[0; 2];$ | 29 | $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 8;$ | $[-1; 2];$ |
| 15 | $y = 2x^3 + 6x^2 - 18x - 5;$ | $[-2; 2];$ | 30 | $y = -x^3 + 5x^2 - 3x + 12;$ | $[1; 4].$ |

Завдання 13.

- 1) Знайти розміри прямокутника, що має найменший периметр серед прямокутників, площа яких дорівнює 16 см^2 .
- 2) Парканом довжиною p необхідно загородити найбільшу за площею прямокутну ділянку, що межує з річкою. Якими мають бути розміри ділянки, якщо зі сторони річки паркан відсутній?
- 3) Парканом довжиною p необхідно загородити найбільшу за площею прямокутну ділянку. Якими мають бути розміри ділянки?
- 4) Якими мають бути сторони прямокутної ділянки площею 1600 м^2 , якщо на її огорожу витрачено найменшу кількість матеріалу?
- 5) З усіх прямокутників, площа яких 25 см^2 , знайти прямокутник з найменшим периметром.
- 6) Вікно прямокутної форми має периметр 6 м . Якими мають бути розміри вікна, якщо площа його найбільша?
- 7) З усіх прямокутників площею 9 дм^2 знайти той, периметр якого найменший.
- 8) Зі всіх прямокутників з діагоналлю 4 дм знайти той, площа якого найбільша.
- 9) Знайти довжини сторін прямокутника, що має площу 144 см^2 та найменший периметр.
- 10) Знайти довжини сторін прямокутника, що при периметрі 48 см має найбільшу площу.
- 11) Необхідно обгородити прямокутну ділянку землі площею 400 м^2 . При яких розмірах прямокутника довжина паркану буде мінімальною?
- 12) З усіх прямокутників, що мають периметр 20 см , знайти той, у якого діагональ найменша.
- 13) Відрізок $AB=60 \text{ см}$ ділиться на дві частини точкою C і будується прямокутник,

сторони якого дорівнюють AC і CB. Знайти найбільше значення його площі.

- 14) Знайти довжини сторін прямокутника з периметром 72 см, що має найбільшу площу.
- 15) Із усіх прямокутників площею 100 м^2 знайти такий, периметр якого найменший.
- 16) З куска дроту довжиною 50 см зігнути прямокутник найбільшої площі.
- 17) Потрібно обгородити парканом прямокутну ділянку землі площею 216 м^2 , а далі поділити її на дві частини стіною, паралельною одній із сторін ділянки. Якої довжини слід узяти сторони ділянки, щоб на цю споруду пішла найменша кількість матеріалу?
- 18) Сума двох діагоналей паралелограма дорівнює 26, кут між ними 30° . Якими мають бути довжини діагоналей, щоб площа паралелограма була найбільшою?
- 19) Серед рівнобедрених трикутників з бічними сторонами 6 см вибрати трикутник найбільшої площі.
- 20) Із дроту довжиною 76 см зігнули прямокутник. Якими повинні бути розміри прямокутника, щоб його площа була найбільшою?
- 21) Парканом довжиною 120 м необхідно загородити прямокутну ділянку землі найбільшої площі. Які повинні бути розміри ділянки?
- 22) Сума діагоналей паралелограма дорівнює 8. Знайти найменшу суму квадратів всіх його сторін.
- 23) Прямокутний загін, який однією стороною прилягає до річки, треба огородити дротяною сіткою завдовжки 200 м. Якими мають бути сторони прямокутника, щоб його площа була найбільшою?
- 24) Необхідно обгородити прямокутну ділянку землі площею 900 м^2 . При яких розмірах ділянки на паркан витратиться мінімум матеріалу?
- 25) Кусок дроту завдовжки 1,8 м згинають так, щоб утворився прямокутник. Якими мають бути сторони прямокутника, щоб його площа була найбільшою?
- 26) Необхідно обгородити прямокутну ділянку землі площею 294 м^2 і розділити потім цю ділянку тином на дві рівні частини. При яких розмірах ділянки довжина всього тину буде найменшою?
- 27) Сума двох сторін трикутника дорівнює 6, а кут між ними 30° . Які повинні бути ці сторони, щоб площа трикутника була найбільшою?
- 28) У магазині фермер купив матеріал для огорожі завдовжки 200 м. Як відгородити прямокутну ділянку найбільшої площі?
- 29) Серед рівнобедрених трикутників із бічною стороною 16 см знайти трикутник, площа якого найбільша.
- 30) Сума двох сторін трикутника дорівнює 10 см, а кут між ними 30° . Якими повинні бути ці сторони, щоб площа трикутника була найбільшою?

§.3 Інтегральне числення функції однієї змінної

Таблиця невизначених інтегралів

$$I. \int 0 dx = C ;$$

$$II. \int dx = x + C ;$$

$$III. \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad (\alpha \neq -1)$$

$$IV. \int \frac{a^x}{a} dx = \frac{a^x}{\ln a} + C ;$$

$$V. \int e^x dx = e^x + C ;$$

$$VI. \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C ;$$

$$VII. \int \cos x dx = \sin x + C ;$$

$$VIII. \int \sin x dx = -\cos x + C ;$$

$$IX. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C ;$$

$$X. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C ;$$

$$XI. \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C ;$$

$$XII. \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C ;$$

$$XIII. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + C ;$$

$$XIV. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C$$

Приклад 1. Знайти наступні інтеграли і:

$$а) \int 7 dx ; б) \int \frac{9}{x} dx ; в) \int (3x^2 - 5 \cdot 2^x + 4 \cos x) dx .$$

Розв'язання

$$а) \int 7 dx = 7 \int dx = 7x + C .$$

$$б) \int \frac{9}{x} dx = 9 \int \frac{dx}{x} = 9 \ln|x| + C .$$

$$в) \int (3x^2 - 5 \cdot 2^x + 4 \cos x) dx = x^3 - 5 \frac{2^x}{\ln 2} + 4 \sin x + C .$$

Формули, які пришвидшують інтегрування:

$$1) \int f(kx+b) dx = \frac{1}{k} F(kx+b) + C ; 2) \int \frac{u'(x) dx}{u(x)} = \ln|u| + C$$

Приклад 2. Знайти невизначені інтеграли: а) $\int \cos\left(5x - \frac{\pi}{6}\right) dx$; б) $\int \frac{3-4x}{3x-2x^2+9} dx$.

$$а) \int \cos\left(5x - \frac{\pi}{6}\right) dx = \frac{1}{5} \sin\left(5x - \frac{\pi}{6}\right) + C .$$

б) У чисельнику дробу записана похідна від знаменника $(3x - 2x^2 + 9)' = 3 - 4x$.

Так як підінтегральний вираз містить тричлен $3x - 2x^2 + 9$ та його похідну, то позначимо цей тричлен новою змінною $t = 3x - 2x^2 + 9$.

$$\int \frac{3-4x}{3x-2x^2+9} dx = \left| \begin{array}{l} t = 3x - 2x^2 + 9 \\ dt = (3-4x) dx \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|3x - 2x^2 + 9| + C .$$

Приклад 3. Знайдіть інтеграли: а) $\int (3x - 7) \sin x dx$, б) $\int x^2 \ln x dx$,

Розв'язання.

$$а) \int (3x - 7) \sin x dx = \left. \begin{array}{l} u = 3x - 7 \\ dv = \sin x dx \end{array} \right| \begin{array}{l} du = 3dx \\ v = -\cos x \end{array} = -(3x - 7) \cos x + \int 3 \cos x dx =$$

$$= (7 - 3x) \cos x + 3 \sin x + C.$$

$$б) \int x^2 \ln x dx = \left. \begin{array}{l} u = \ln x \\ dv = x^2 dx \end{array} \right| \begin{array}{l} du = \frac{dx}{x} \\ v = \frac{x^3}{3} \end{array} = \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 dx = \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{x^3}{9} + C.$$

Приклад 4.

Знайти інтеграли: а) $\int \frac{3x - 2}{x^2 + x - 2} dx$; б) $\int \frac{2x + 15}{x^2 + 4x + 10} dx$; в) $\int \frac{3x^3 - 4x^2 - 18x - 12}{x^2 - x - 6} dx$;

Розв'язання.

а) Дріб правильний. Знайдемо дискримінант знаменника, щоб перевірити буде він елементарним чи ні. Оскільки $D = 1 + 8 = 9 > 0$, то дріб буде неелементарним, а отже його можна розкласти на суму елементарних. Для цього:

1) Розкладемо знаменник дробу на множники за формулою: $a(x - x_1)(x - x_2)$, де x_1 і x_2 - корені квадратного тричлена. За теоремою Вієта маємо $x_1 = -2$; $x_2 = 1$, тому $x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1)$.

2) Даний дріб розкладається на суму двох елементарних дробів за схемою

$$\frac{3x - 2}{x^2 + x - 2} = \frac{A}{x + 2} + \frac{B}{x - 1}.$$

3) Зведемо елементарні дробі до спільного знаменника

$$\frac{A}{x + 2} + \frac{B}{x - 1} = \frac{Ax - A + Bx + 2B}{(x + 2)(x - 1)} = \frac{x(A + B) - A + 2B}{(x + 2)(x - 1)};$$

4) Прирівняємо чисельники даного й утвореного дробів: $3x - 2 = x(A + B) - A + 2B$.

Для того, щоб два многочлени були тотожно рівні, необхідно й достатньо, щоб коефіцієнти при однакових степенях x у них були рівні. З огляду на це

$$\begin{cases} A + B = 3, \\ -A + 2B = -2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = \frac{1}{3}, \\ A = \frac{8}{3}. \end{cases}$$

Тобто $\frac{3x - 2}{x^2 + x - 2} = \frac{8}{3} \frac{1}{x + 2} + \frac{1}{3} \frac{1}{x - 1}$. Тому даний інтеграл можна розкласти на суму двох

інтегралів

$$\int \frac{3x - 2}{x^2 + x - 2} dx = \int \frac{8}{x + 2} dx + \int \frac{1}{x - 1} dx = \frac{8}{3} \ln |x + 2| + \frac{1}{3} \ln |x - 1| + C.$$

б) Під інтегралом знаходиться правильний дріб. Щоб перевірити, буде він елементарним чи ні, знайдемо дискримінант знаменника $D = 16 - 40 = -24 < 0$. Отже, дріб є елементарним третього типу. Розкладемо підінтегральний вираз на суму двох дробів таким чином, щоб у чисельнику одного з них була похідна від знаменника.

$$\int \frac{2x+15}{x^2+4x+10} dx = \int \frac{2x+4+11}{x^2+4x+10} dx = \int \frac{2x+4}{x^2+4x+10} dx + \int \frac{11}{x^2+4x+10} dx = I_1 + I_2.$$

Знайдемо кожний інтеграл окремо.

$$I_1 = \int \frac{2x+4}{x^2+4x+10} dx = \left| \begin{array}{l} t = x^2 + 4x + 10 \\ dt = (2x+4)dx \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|x^2 + 4x + 10| + C.$$

$$I_2 = \int \frac{11}{x^2+4x+10} dx = \int \frac{11}{x^2+4x+4+6} dx = 11 \int \frac{dx}{(x+2)^2+6} = \left| \begin{array}{l} t = x+2 \\ dt = dx \end{array} \right| = 11 \int \frac{dt}{t^2+6} = \\ = \frac{11}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{6}} + C = \frac{11}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{\sqrt{6}} + C.$$

Остаточно маємо

$$\int \frac{2x+15}{x^2+4x+10} dx = \ln|x^2+4x+10| + \frac{11}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{\sqrt{6}} + C.$$

в) Дріб неправильний. Поділимо чисельник на знаменник, щоб виділити його цілу частину.

$$3x^3 - 4x^2 - 18x - 12 \Big| x^2 - x - 6$$

$$\begin{array}{r} 3x^3 - 3x^2 - 18x \quad 3x - 1 \\ -x^2 + 0x - 12 \\ -x^2 + x + 6 \\ -x - 18 \end{array}$$

Так як $\frac{3x^3 - 4x^2 - 18x - 12}{x^2 - x - 6} = 3x - 1 + \frac{-x - 18}{x^2 - x - 6}$, то

$$\int \frac{3x^3 - 4x^2 - 18x - 12}{x^2 - x - 6} dx = \int \left(3x - 1 + \frac{-x - 18}{x^2 - x - 6} \right) dx = \int (3x - 1) dx - \int \frac{x + 18}{x^2 - x - 6} dx = \\ = \frac{3x^2}{2} - x - \int \frac{x + 18}{x^2 - x - 6} dx.$$

Підінтегральний дріб правильний, але неелементарний ($D = 25 > 0$). Розкладемо його на суму елементарних дробів. Так як $x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)$, тому

$$\frac{x+18}{x^2-x-6} = \frac{x+18}{(x-3)(x+2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2} = \frac{Ax+2A+Bx-3B}{(x-3)(x+2)} = \frac{(A+B)x+2A-3B}{(x-3)(x+2)}.$$

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях x у чисельниках першого і останнього дробів.

$$\begin{cases} A+B=1, \\ 2A-3B=18; \end{cases} \quad \begin{cases} 5A=21, \\ B=1-A; \end{cases} \quad \begin{cases} A = \frac{21}{5}, \\ B = -\frac{16}{5}; \end{cases} \quad \text{Тобто} \quad \frac{x+18}{x^2-x-6} = \frac{21}{5(x-3)} - \frac{16}{5(x+2)}.$$

Звідси $\int \frac{x+18}{x^2-x-6} dx = \int \frac{21}{x-3} dx + \int \frac{16}{x+2} dx = 21 \ln|x-3| - 16 \ln|x+2| + C.$

Остаточо маємо $\int \frac{3x^3 - 4x^2 - 18x - 12}{x^2 - x - 6} dx = \frac{3x^2}{2} - x - \frac{21}{5} \ln|x-3| + \frac{16}{5} \ln|x+2| + C.$

Приклад 5. Зайти інтеграл $\int \frac{x + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[6]{x}}{x(1 + \sqrt[3]{x})} dx.$

Розв'язання. Найменшим спільним кратним показників коренів є число 6, тому вводимо заміну $x = t^6.$

$$\int \frac{x + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[6]{x}}{x(1 + \sqrt[3]{x})} dx = \left. \begin{array}{l} x = t^6 \\ dx = 6t^5 dt \\ t = \sqrt[6]{x} \end{array} \right| = \int \frac{t^6 + t^4 + t}{t^6(1+t^2)} 6t^5 dt = 6 \int \frac{t^5 + t^3 + 1}{(1+t^2)} dt =$$

Приклад 6 Знайти інтеграл: а) $\int \frac{dx}{9 + 8 \cos x + \sin x};$.. в) $\int \cos 8x \cdot \cos 5x dx$

Розв'язання.

а) Застосуємо універсальну підстановку :

$$а) \int \frac{dx}{9 + 8 \cos x + \sin x} = \left. \begin{array}{l} t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \quad \cos t = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{2dt}{(1+t^2) \left(9 + 8 \frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{2t}{1+t^2} \right)} =$$

$$= 2 \int \frac{dt}{t^2 + 2t + 17} = 2 \int \frac{dt}{(t+1)^2 + 16} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{t+1}{4} + C = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1 + C.$$

б) $\int \cos 8x \cdot \cos 5x dx = \frac{1}{2} \int (\cos(8+5)x + \cos(8-5)x) dx = \frac{1}{2} \int \cos 13x dx + \frac{1}{2} \int \cos 3x dx =$

$$= \frac{1}{26} \sin 13x + \frac{1}{6} \sin 3x + C.$$

Приклад 7. Обчислити інтеграл $\int_1^2 (3x^2 - e^x + 5) dx.$

Розв'язання. Знайдемо первісну підінтегрального виразу та застосуємо формулу Ньютона-Лейбніца.

$$\int_1^2 (3x^2 - e^x + 5) dx = \left(x^3 - e^x + 5x \right) \Big|_1^2 = 2^3 - e^2 + 5 \cdot 2 - \left(1^3 - e^1 + 5 \cdot 1 \right) =$$

$$= 8 - e^2 + 10 + 1 = 19 - e^2.$$

Приклад 10. Обчислити інтеграл: а) $\int_1^3 x \ln x dx.$ б) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (4x - 3) \sin x dx.$ в) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{7 + \cos x} dx$

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \int_1^2 x^3 \ln x dx &= \left| \begin{array}{l} u = \ln x, \quad dv = x^3 dx, \\ du = \frac{dx}{x}; \quad v = \frac{x^4}{4}; \end{array} \right| = \frac{1}{4} x^4 \ln x \Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{4} x^4 \cdot \frac{dx}{x} = \\
 &= \frac{1}{4} 2^4 \ln 2 - \frac{1}{4} 1^4 \ln 1 - \frac{1}{16} x^4 \Big|_1^2 = 4 \ln 2 - \frac{1}{16} (16 - 1) = 4 \ln 2 - \frac{15}{16}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{б) } \int_0^{\frac{\pi}{4}} (4x - 3) \sin x dx &= \left| \begin{array}{l} u = 4x - 3, \quad du = 4 dx \\ dv = \sin x dx, \quad v = -\cos x \end{array} \right| = -(4x - 3) \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} (-4 \cos x) dx = \\
 &= -(4 \cdot \frac{\pi}{4} - 3) \cos \frac{\pi}{4} - (-4 \cdot 0 - 3) \cos 0 + 4 \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = (3 - \pi) \frac{\sqrt{2}}{2} + 3 \cdot 1 + 4 \sin \frac{\pi}{4} - 4 \sin 0 = \\
 &= (3 - \pi) \frac{\sqrt{2}}{2} + 3 + 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 = (3 - \pi) \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\sqrt{2} + 3.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{в) } \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{7 + \cos x} dx &= \left| \begin{array}{l} t = 7 + \cos x, \\ dt = -\sin x dx, \\ x = 0, \quad t = 8; \\ x = \frac{\pi}{3}, \quad t = 7,5; \end{array} \right| = - \int_8^{7,5} \frac{dt}{t} = \int_{7,5}^8 \frac{dt}{t} = \ln t \Big|_{7,5}^8 = \ln 8 - \ln 7,5 = \ln \frac{16}{15}.
 \end{aligned}$$

Приклад 11. Знайти невластні інтеграли: а) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^4}$; б) $\int_{-\infty}^0 3e^x dx$.

Розв'язання. а) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^4} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_2^b x^{-4} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^{-3}}{-3} \right) \Big|_2^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{3b^3} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} \right) = \frac{1}{24}$.

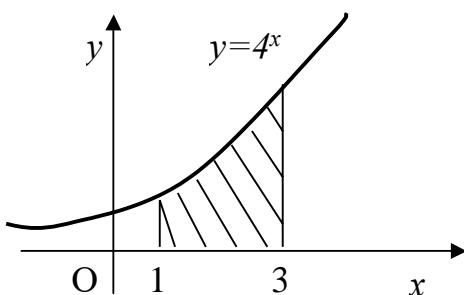
б) $\int_{-\infty}^0 3e^x dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 3e^x dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(3e^x \right) \Big|_a^0 = \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(3e^0 - 3e^a \right) = 3$.

Приклад 12. Знайти площі фігур, обмежених лініями:

а) $y = 4^x$, $x = 1$, $x = 3$ та $y = 0$; б) $y = 3x^3$, $x = -2$, $x = 4$ та $y = 0$;

в) $y = x^2 + 4x$, $y = x + 4$.

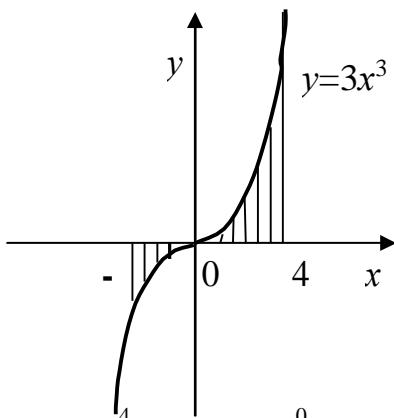
Розв'язання. а) Покажемо схематично який вигляд має ця фігура.



Дана фігура є криволінійною трапецією

$$S = \int_1^3 4^x dx = \frac{4^x}{\ln 4} \Big|_1^3 = \frac{4^3}{\ln 4} - \frac{4^1}{\ln 4} = \frac{60}{\ln 4}$$

б) Покажемо на рисунку фігуру, площу якої необхідно знайти. Рівняння $y = 3x^3$ задає кубічну параболу.



$$S = \int_{-2}^4 |3x^3| dx.$$

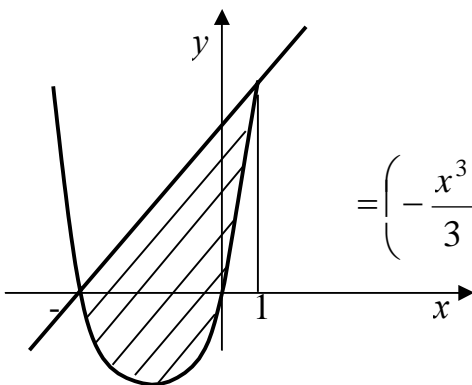
Оскільки підінтегральна функція під модулем, то необхідно розкрити модуль. Розіб'ємо інтервал на якому здійснюється інтегрування на два:

1) $[-2;0]$, тут $3x^3 \leq 0$;

2) $[0;4]$, на ньому $3x^3 \geq 0$.

$$S = \int_{-2}^4 |3x^3| dx = \int_{-2}^0 |3x^3| dx + \int_0^4 |3x^3| dx = \int_{-2}^0 -3x^3 dx + \int_0^4 3x^3 dx = -\left(\frac{3x^4}{4}\right)_{-2}^0 + \left(\frac{3x^4}{4}\right)_0^4 = -\left(\frac{3 \cdot 16}{4}\right) + \left(\frac{3 \cdot 256}{4}\right) = -12 + 192 = 180.$$

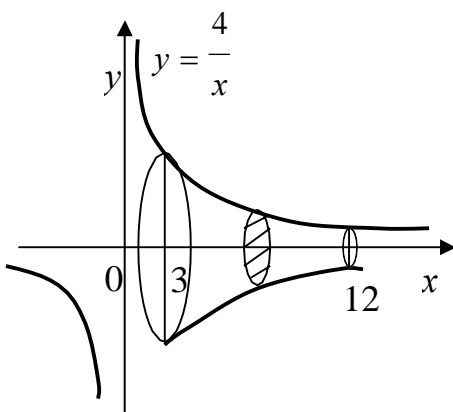
в) Фігура, площу якої ми будемо шукати у цьому прикладі, обмежена графіками двох функцій $y = x^2 + 4x$ та $y = x + 4$



$$S = \int_{-4}^1 (x^2 + 4x - (x + 4)) dx = \int_{-4}^1 (x^2 + 3x - 4) dx = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 4x\right)_{-4}^1 = \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{2} - 4\right) - \left(-\frac{64}{3} - 24 + 16\right) = \frac{125}{6}.$$

Приклад 13. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox криволінійної трапеції, обмеженої гіперболою $y = \frac{4}{x}$, прямими $x = 3$, $x = 12$; $y = 0$;

Розв'язання. Покажемо на рисунку тіло, об'єм якого необхідно знайти.



Користуючись формулою (3.8), знаходимо

$$V = \pi \int_3^{12} \left(\frac{4}{x}\right)^2 dx = 16\pi \int_3^{12} \frac{dx}{x^2} = -16\pi \frac{1}{x} \Big|_3^{12} = -16\pi \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{3}\right) = 4\pi.$$

Завдання для самостійної роботи

Завдання 1. Знайти інтеграли:

- | | | |
|---|--|---------------------------------------|
| 1) $\int 5x^4 dx;$ | 2) $\int 4^x dx;$ | 3) $\int \frac{8dx}{\cos^2 x};$ |
| 4) $\int 20x^9 dx;$ | 5) $\int 4 \cos x dx;$ | 6) $\int 8 \sin x dx;$ |
| 7) $\int \frac{9dx}{x};$ | 8) $\int \frac{dx}{4+};$ | 9) $\int 10x^7 dx;$ |
| 10) $\int \frac{dx}{x^2 - 9};$ | 11) $\int \frac{dx}{\sqrt{10 - x^2}};$ | 12) $\int 3 \cos x dx;$ |
| 13) $\int \frac{dx}{3+};$ | 14) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}};$ | 15) $\int \frac{dx}{x^2 - 36};$ |
| 16) $\int \frac{dx}{\sqrt{121 - x^2}};$ | 17) $\int 7^x dx;$ | 18) $\int \frac{dx}{25 + x^2};$ |
| 19) $\int \frac{dx}{\sqrt{100 - x^2}};$ | 20) $\int \frac{dx}{x^2 - 81};$ | 21) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 7}};$ |
| 22) $\int \frac{dx}{\sqrt{49 - x^2}};$ | 23) $\int \frac{dx}{8 + x^2};$ | 24) $\int \frac{5dx}{x};$ |
| 25) $\int \frac{23dx}{\sin^2 x};$ | 26) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 36}};$ | 27) $\int \frac{dx}{x^2 - 16};$ |
| 28) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 81}};$ | 29) $\int 6 \sin x dx;$ | 30) $\int 7x^{10} dx.$ |

Завдання 2. Знайти інтеграли:

- | | |
|---|--|
| 1) $\int (\sqrt{x} + 5^x) dx;$ | 2) $\int \left(\frac{3}{x^2} + 2^x - 1 \right) dx;$ |
| 3) $\int \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \cos x + 4 \right) dx;$ | 4) $\int (2x^{-1,5} + 5x^{-0,6} - 4) dx;$ |

- 5) $\int (5 - x^3 + \cos x) dx;$
- 6) $\int (6x^3 + 4^x + 8) dx;$
- 7) $\int 4(x^2 - 3 + \cos x) dx;$
- 8) $\int (x^{-4} + 8 + \sin x) dx;$
- 9) $\int \left(\frac{2}{\cos^2 x} - 7 - \frac{5}{\sin^2 x} \right) dx;$
- 10) $\int (3^x - x^3 + 3^3) dx;$
- 11) $\int \left(4 \sin x - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + 7 \right) dx;$
- 12) $\int \left(3x^2 - 4 + \frac{5}{5+x^2} \right) dx;$
- 13) $\int \left(1 + \frac{4}{x} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx;$
- 14) $\int (x^4 - 5e^x + \cos x) dx;$
- 15) $\int \left(\frac{7}{x} + 9^x + 4 \right) dx;$
- 16) $\int \left(\frac{1}{x^2 + 36} - 3 + \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx;$
- 17) $\int \left(9 + \frac{4}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \right) dx;$
- 18) $\int \left(5^x + 1 - \frac{3}{16+x^2} \right) dx;$
- 19) $\int \left(x^6 + 4 - \frac{1}{x^2 - 9} \right) dx;$
- 20) $\int \left(9e^x - 8 - \frac{5}{x} \right) dx;$
- 21) $\int \left(x^9 - \frac{3}{\sqrt{25-x^2}} + 12 \right) dx;$
- 22) $\int \left(\frac{24}{x} - \frac{3}{\cos^2 x} - 5 \right) dx;$
- 23) $\int \left(4^x - \frac{9}{36+x^2} + 11 \right) dx;$
- 24) $\int \left(x^{10} + \frac{4}{\sin^2 x} - 8 \right) dx;$
- 25) $\int \left(3 \sin x + \frac{1}{x^2 - 1} + 51 \right) dx;$
- 26) $\int \left(\frac{15}{x^2 + 49} - \frac{1}{x} + 25 \right) dx;$
- 27) $\int \left(x^{\frac{1}{2}} - \cos x + 4 \right) dx;$
- 28) $\int \left(\frac{15}{x-3} + \frac{1}{\sqrt{81-x^2}} + 13 \right) dx;$
- 29) $\int \left(\frac{6}{\sqrt{x^2+7}} - x^{3.5} + 2 \right) dx;$
- 30) $\int \left(\frac{4}{9+x^2} - \frac{9}{x} + 63 \right) dx.$

Завдання 3. Знайти інтеграли:

- | | | |
|---------------------------------------|--|--|
| 1) $\int \cos(5x + 3)dx;$ | 2) $\int \sin\left(\frac{\pi}{4} - 4x\right)dx;$ | 3) $\int (12x - 5)^7 dx;$ |
| 4) $\int (8x + 9)^{12} dx;$ | 5) $\int e^{4-3x} dx;$ | 6) $\int \frac{dx}{(5 - 3x)^4};$ |
| 7) $\int 6^{5x+2} dx;$ | 8) $\int \frac{dx}{\cos^2(9x - 7)};$ | 9) $\int \sin(3x - 24)dx;$ |
| 10) $\int (7x - 9)^4 dx;$ | 11) $\int \frac{dx}{\cos^2 7x};$ | 12) $\int e^{7x-12} dx;$ |
| 13) $\int \frac{dx}{\sin^2 6x};$ | 14) $\int \frac{dx}{(7 + 4x)^5};$ | 15) $\int \cos(8x + \pi)dx;$ |
| 16) $\int \sin(5x - 12)dx;$ | 17) $\int \frac{dx}{\sin^2(2x + 7)};$ | 18) $\int \frac{dx}{\sin^2(4x - 5)} dx;$ |
| 19) $\int e^{4x-2} dx;$ | 20) $\int \sin\left(\frac{\pi}{7} + 6x\right)dx;$ | 21) $\int \frac{dx}{(9x - 4)^7};$ |
| 22) $\int \cos 11x dx;$ | 23) $\int (5x + 16)^{-2} dx;$ | 24) $\int \frac{dx}{(12x + 5)^7};$ |
| 25) $\int \frac{dx}{\cos^2(3x + 5)};$ | 26) $\int 7^{3x-4} dx;$ | 27) $\int \cos(x + 5)dx;$ |
| 28) $\int 9^{7x-4} dx;$ | 29) $\int \left(\begin{matrix} \sin\left(\frac{\pi}{2} - 9x\right) \\ 2 \end{matrix} \right) dx;$ | 30) $\int \frac{dx}{\sin^2(5x - 8)}.$ |

Завдання 4. Знайти інтеграли:

- | | | |
|---|--|--|
| 1) $\int \frac{dx}{1 - 10x};$ | 2) $\int \frac{e^{2x} dx}{1 - 3e^{2x}};$ | 3) $\int \frac{dx}{\operatorname{ctgx} \cdot \sin^2 x};$ |
| 4) $\int \operatorname{ctg} x dx;$ | 5) $\int \frac{x^2 dx}{13 - 9x^3};$ | 6) $\int \frac{(8x + 8)dx}{4x^2 + 8x - 9};$ |
| 7) $\int \frac{3x dx}{16 - 2x^2};$ | 8) $\int \frac{\sin x dx}{1 + 3\cos x};$ | 9) $\int \frac{dx}{17 + 7x};$ |
| 10) $\int \frac{\sin x dx}{20 - \cos x};$ | 11) $\int \operatorname{tg} x dx;$ | 12) $\int \frac{e^{5x} dx}{2 -};$ |

| | | |
|---|--|---|
| 13) $\int \frac{dx}{x \cdot (\ln x)}$; | 14) $\int \frac{dx}{6x + 15}$; | 15) $\int \frac{e^x dx}{3e^x + 7}$; |
| 16) $\int \frac{(1+12x)dx}{x + 6x^2}$; | 17) $\int \frac{(10x - 3x^2)dx}{x^3 - 5x^2 - 6}$; | 18) $\int \frac{\cos 6x dx}{2 + \sin 6x}$; |
| 19) $\int \frac{e^{6x} dx}{1 + 4e^{6x}}$; | 20) $\int \frac{4x^3 dx}{11 + 3x^4}$; | 21) $\int \frac{\cos x dx}{1 + 3\sin x}$; |
| 22) $\int \frac{4^x dx}{7 + 4^x}$; | 23) $\int \frac{(2x+1)dx}{x + x^2 - 3}$; | 24) $\int \frac{x dx}{8x^2 + 5}$; |
| 25) $\int \frac{\cos 2x dx}{\sin x \cdot \cos x}$; | 26) $\int \frac{e^x dx}{5 - 4e^x}$; | 27) $\int \frac{(6x - 5)dx}{4 + 3x^2 - 5x}$; |
| 28) $\int \frac{x dx}{5x^2 - 2}$; | 29) $\int \frac{dx}{\operatorname{tg} x \cdot \cos^2 x}$; | 30) $\int \frac{dx}{x(1 + \ln x)}$. |

Завдання 5. Знайти інтеграли:

| | | |
|---|--|--|
| 1) $\int x\sqrt{x^2 - 7} dx$; | 2) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{1 - x^3}}$; | 3) $\int \frac{e^x dx}{(e^x - 5)^3}$; |
| 4) $\int \frac{(6x - 5)dx}{\sqrt{3x^2 - 5x + 6}}$; | 5) $\int \frac{(8 - \sqrt{x})^3 dx}{\sqrt{x}}$; | 6) $\int \frac{dx}{(6 + \sqrt[3]{x})^4 \sqrt[3]{x^2}}$; |
| 7) $\int \frac{e^{\frac{3}{x}} dx}{x^2}$; | 8) $\int \frac{\sqrt[6]{\ln^5 x} dx}{x}$; | 9) $\int x^2 6^{1-x^3} dx$; |
| 10) $\int \sqrt[4]{e^{3x} + 8} \cdot e^{3x} dx$; | 11) $\int \frac{e^{5x} dx}{4 - e^{10x}}$; | 12) $\int \frac{7^x dx}{\sqrt{49^x + 1}}$; |
| 13) $\int e^{-x^2} x dx$; | 14) $\int \frac{e^{\sqrt{x}} dx}{\sqrt{x}}$; | 15) $\int x\sqrt{x^2 + 2} dx$; |
| 16) $\int x^2 \cdot \sqrt[3]{x^3 - 8} dx$; | 17) $\int 4x^3 \cdot \sqrt{x^4 - 2} dx$; | 18) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{4 + x^3}}$; |
| 19) $\int \frac{6x^2 dx}{(2x - 3)^4}$; | 20) $\int e^x \cdot \sqrt{2e^x + 6} dx$; | 21) $\int \frac{x^2 dx}{(x + 9)^3}$; |
| 22) $\int x^2 \cdot \sqrt{7x + 2} dx$; | 23) $\int \frac{(2 - \ln x) dx}{x}$; | 24) $\int \frac{x^3 dx}{(5x^4 + 7)^5}$; |

$$25) \int \frac{e^x dx}{(e^x + 8)^4}; \quad 26) \int \frac{e^x dx}{\sqrt{1 - e^{2x}}}; \quad 27) \int x^3 \cdot \sqrt{(x^4 - 1)^3} dx;$$

$$28) \int \frac{e^x dx}{1 + e^{2x}}; \quad 29) \int \frac{dx}{x(1 + \ln^2 x)}; \quad 30) \int \frac{x^2 dx}{x^6 + 1}.$$

Завдання 6. Знати інтеграли:

$$1) \int (x - 7) \sin x dx; \quad 2) \int (1 - 3x) \cos x dx; \quad 3) \int (2x + 5) \sin x dx;$$

$$4) \int (3x^2 + 2) \cos x dx; \quad 5) \int (5 - 2x) \sin x dx; \quad 6) \int (10 + 13x) \cos x dx;$$

$$7) \int (5x - 17) \sin x dx; \quad 8) \int (1 + 23x^2) \cos x dx; \quad 9) \int (7x^2 + 1) \sin x dx;$$

$$10) \int (11 - 9x) \cos x dx; \quad 11) \int (x^2 + 17) \sin x dx; \quad 12) \int (5 - 3x^2) \cos x dx;$$

$$13) \int (5x - 12) \sin x dx; \quad 14) \int (1 + 9x^2) \cos x dx; \quad 15) \int (x^2 - 21) \sin x dx;$$

$$16) \int (7 + 6x) \cos x dx; \quad 17) \int (8x^2 - 7) \sin x dx; \quad 18) \int (4 + 8x) \cos x dx;$$

$$19) \int (4x^2 - 9) \sin x dx; \quad 20) \int (7 - 5x^2) \cos x dx; \quad 21) \int (2x + 6) \sin x dx;$$

$$22) \int (8 - 4x^2) \cos x dx; \quad 23) \int (7x^2 + 5) \sin x dx; \quad 24) \int (12 - 5x^2) \cos x dx;$$

$$25) \int (6x + 11) \sin x dx; \quad 26) \int (6 - 11x^2) \cos x dx; \quad 27) \int (14x - 3) \sin x dx;$$

$$28) \int (9 - 12x) \cos x dx; \quad 29) \int (21 + 7x) \cos x dx; \quad 30) \int (15x^2 + 4) \sin x dx.$$

Завдання 7 Знати інтеграли:

$$1) \int x^7 \ln x dx; \quad 2) \int (5x - 2) \ln x dx; \quad 3) \int (2x + 1) \ln x dx;$$

$$4) \int x \ln x dx; \quad 5) \int \frac{\ln x}{x^9} dx; \quad 6) \int \frac{\ln x}{x^3} dx;$$

| | | |
|--|--|--|
| 7) $\int (3x - x^2) \ln x dx;$ | 8) $\int 5x^4 \ln x dx;$ | 9) $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx;$ |
| 10) $\int x^2 \ln x dx;$ | 11) $\int \frac{\ln x}{x^2} dx;$ | 12) $\int (x^2 + 4) \ln x dx;$ |
| 13) $\int (5x - 7) \ln x dx;$ | 14) $\int \frac{\ln x}{x^4} dx;$ | 15) $\int \sqrt{x} \ln x dx;$ |
| 16) $\int 5x^{10} \ln x dx;$ | 17) $\int \sqrt[4]{x} \ln x dx;$ | 18) $\int \frac{\ln x}{4x^8} x dx;$ |
| 19) $\int (2x + 3x^2) \ln x dx;$ | 20) $\int \frac{10 \ln x}{x^{11}} x dx;$ | 21) $\int \frac{x^5 \ln x}{5} dx;$ |
| 22) $\int \frac{22 \ln x}{x^{12}} x dx;$ | 23) $\int x^{11} \ln x dx;$ | 24) $\int (8x - 3) \ln x dx;$ |
| 25) $\int (6x^2 - 4x) \ln x dx;$ | 26) $\int \frac{10 \ln x}{x^6} x dx;$ | 27) $\int 8x^4 \ln x dx;$ |
| 28) $\int 12x^3 \ln x dx;$ | 29) $\int (7x + 9) \ln x dx;$ | 30) $\int \frac{28 \ln x}{x^{15}} x dx.$ |

Завдання 8 Знайти інтеграли:

| | | |
|--|--|---------------------------------------|
| 1) $\int \frac{8x+10}{x^2+7x-8} dx;$ | 2) $\int \frac{-x+11}{x^2-x-2} dx;$ | 3) $\int \frac{3x+39}{x^2+5x-14} dx;$ |
| 4) $\int \frac{3x-26}{x^2+x-6} dx;$ | 5) $\int \frac{-4x+19}{x^2+x-12} dx;$ | 6) $\int \frac{-4x+2}{x^2+2x-8} dx;$ |
| 7) $\int \frac{x+10}{x^2-x-12} dx;$ | 8) $\int \frac{2x-5}{x^2+x-2} dx;$ | 9) $\int \frac{8x+10}{x^2+7x-8} dx;$ |
| 10) $\int \frac{x-32}{x^2-x-20} dx;$ | 11) $\int \frac{x+1}{x^2+5x+6} dx;$ | 12) $\int \frac{3x+26}{x^2-x-30} dx;$ |
| 13) $\int \frac{2x+16}{x^2-2x-8} dx;$ | 14) $\int \frac{4x-36}{x^2-6x-7} dx;$ | 15) $\int \frac{6x-22}{x^2-3x+2} dx;$ |
| 16) $\int \frac{3x+14}{x^2+7x+12} dx;$ | 17) $\int \frac{-3x-21}{x^2+2x-3} dx;$ | 18) $\int \frac{-x+31}{x^2+x-12} dx;$ |

| | | |
|---|---------------------------------------|--|
| 19) $\int \frac{4x-25}{x^2-5x+4} dx;$ | 20) $\int \frac{x-34}{x^2-3x-4} dx;$ | 21) $\int \frac{11x+26}{x^2+x-12} dx;$ |
| 22) $\int \frac{-3x+18}{x^2-5x+4} dx;$ | 23) $\int \frac{4x-31}{x^2-3x-4} dx;$ | 24) $\int \frac{x-25}{x^2+4x-5} dx;$ |
| 25) $\int \frac{5x+9}{x^2+6x+5} dx;$ | 26) $\int \frac{3x+12}{x^2-7x+6} dx;$ | 27) $\int \frac{-6x-23}{x^2+5x+4} dx;$ |
| 28) $\int \frac{-11x-24}{x^2+3x-4} dx;$ | 29) $\int \frac{-4x}{x^2+4x+3} dx;$ | 30) $\int \frac{-7x+19}{x^2-6x+5} dx.$ |

Завдання 9. Знати інтеграли:

| | | |
|--|--|--|
| 1) $\int \frac{4x-31}{x^2+3x+10} dx;$ | 2) $\int \frac{-x+11}{x^2+x+5} dx;$ | 3) $\int \frac{-4x}{x^2-x+7} dx;$ |
| 4) $\int \frac{x+9}{x^2+2x+8} dx;$ | 5) $\int \frac{2x+3}{x^2-2x+6} dx;$ | 6) $\int \frac{-4x+2}{x^2+3x+15} dx;$ |
| 7) $\int \frac{8x+10}{x^2-3x+8} dx;$ | 8) $\int \frac{2x+10}{x^2-x+9} dx;$ | 9) $\int \frac{x+5}{x^2+x+6} dx;$ |
| 10) $\int \frac{x-32}{x^2-2x+7} dx;$ | 11) $\int \frac{3x+43}{x^2-2x+7} dx;$ | 12) $\int \frac{3x+2}{2x^2+4x+17} dx;$ |
| 13) $\int \frac{-4x+19}{3x^2+6x+19} dx;$ | 14) $\int \frac{4x-17}{x^2+3x+12} dx;$ | 15) $\int \frac{8x+10}{x^2-3x+10} dx;$ |
| 16) $\int \frac{3x+14}{x^2-4x+17} dx;$ | 17) $\int \frac{2x+16}{x^2+4x+20} dx;$ | 18) $\int \frac{x+16}{x^2+5x+30} dx;$ |
| 19) $\int \frac{x-3}{x^2-5x+27} dx;$ | 20) $\int \frac{x-34}{x^2+6x+40} dx;$ | 21) $\int \frac{6x-22}{x^2-6x+37} dx;$ |
| 22) $\int \frac{-3x+18}{x^2-5x+42} dx;$ | 23) $\int \frac{4x+5}{x^2-x+3} dx;$ | 24) $\int \frac{x-25}{x^2+x+5} dx;$ |
| 25) $\int \frac{-3x-21}{x^2+2x+4} dx;$ | 26) $\int \frac{3x+12}{x^2-2x+7} dx;$ | 27) $\int \frac{11x+26}{x^2+3x+5} dx;$ |
| 28) $\int \frac{4x+5}{x^2-3x+6} dx;$ | 29) $\int \frac{-6x+3}{x^2+4x+7} dx;$ | 30) $\int \frac{-7x+19}{x^2-4x+8} dx.$ |

Завдання 10. Знайти інтеграли:

| | | |
|---|---|--|
| 1) $\int \frac{2x^3-27x-5}{x^2-3x-4} dx;$ | 2) $\int \frac{-4x^3+49x+84}{x^2-2x-8} dx;$ | 3) $\int \frac{6x^3-81x-95}{x^2-x-12} dx;$ |
|---|---|--|

| | | | | | |
|-----|--|-----|---|-----|---|
| 4) | $\int \frac{-6x^3 + 43x + 43}{x^2 - x - 6} dx;$ | 5) | $\int \frac{4x^3 - 17x - 45}{x^2 - 2x - 3} dx;$ | 6) | $\int \frac{-2x^3 + 25x - 33}{x^2 - 4x + 3} dx;$ |
| 7) | $\int \frac{-2x^3 + 56x - 88}{x^2 - 6x + 8} dx;$ | 8) | $\int \frac{-2x^3 + 56x - 88}{x^2 - 6x + 8} dx;$ | 9) | $\int \frac{8x^3 - 20x - 3}{x^2 - x - 2} dx;$ |
| 10) | $\int \frac{-6x^3 + 43x - 29}{x^2 + 2x - 3} dx;$ | 11) | $\int \frac{6x^3 - 15x + 24}{x^2 + x - 2} dx;$ | 12) | $\int \frac{-10x^3 + 71x - 72}{x^2 + x - 6} dx;$ |
| 13) | $\int \frac{4x^3 - 89x + 91}{x^2 + 4x - 5} dx;$ | 14) | $\int \frac{6x^3 - 15x + 24}{x^2 + x - 2} dx;$ | 15) | $\int \frac{12x^3 - 42x + 15}{x^2 + x - 2} dx;$ |
| 16) | $\int \frac{-10x^3 + 33x + 20}{x^2 - x - 2} dx;$ | 17) | $\int \frac{8x^3 - 60x - 55}{x^2 + 3x + 2} dx;$ | 18) | $\int \frac{-8x^3 + 101x + 66}{x^2 - x - 12} dx;$ |
| 19) | $\int \frac{4x^3 - 83x - 85}{x^2 + 5x + 4} dx;$ | 20) | $\int \frac{-6x^3 + 83x - 45}{x^2 + x - 12} dx;$ | 21) | $\int \frac{-4x^3 + 82x - 45}{x^2 + x - 20} dx;$ |
| 22) | $\int \frac{-2x^2 + 56x - 88}{x^2 - 6x + 8} dx;$ | 23) | $\int \frac{8x^3 - 20x - 3}{x^2 - x - 2} dx;$ | 24) | $\int \frac{-4x^3 + 82x - 45}{x^2 + 3x - 20} dx;$ |
| 25) | $\int \frac{12x^3 - 42x + 15}{x^2 + x - 2} dx;$ | 26) | $\int \frac{2x^3 - 71x - 154}{x^2 + 7x + 12} dx;$ | 27) | $\int \frac{5x^3 - 2x + 17}{x^2 - x - 12} dx;$ |
| 28) | $\int \frac{3x^3 - 59x + 16}{x^2 + 3x - 4} dx;$ | 29) | $\int \frac{2x^3 - 71x - 154}{x^2 - x - 6} dx;$ | 30) | $\int \frac{3x^3 - 22x - 30}{x^2 - x - 6} dx.$ |

Завдання 11. Знайти інтеграли:

| | | | | | |
|-----|--|-----|---|-----|---|
| 1) | $\int \frac{dx}{x + \sqrt[3]{x}};$ | 2) | $\int \frac{dx}{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x}};$ | 3) | $\int \frac{1 + \sqrt[4]{x}}{x + \sqrt{x}} dx;$ |
| 4) | $\int \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{1 + \sqrt[6]{x}} dx;$ | 5) | $\int \frac{dx}{(1 - \sqrt[3]{x})\sqrt{x}};$ | 6) | $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}};$ |
| 7) | $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}};$ | 8) | $\int \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} dx;$ | 9) | $\int \frac{x + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[6]{x}}{x(1 + \sqrt[3]{x})} dx;$ |
| 10) | $\int \frac{\sqrt[6]{x}}{1 + \sqrt[3]{x}} dx;$ | 11) | $\int \frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^5} - \sqrt[6]{x^7}} dx;$ | 12) | $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2}};$ |
| 13) | $\int \frac{dx}{x + \sqrt{x}};$ | 14) | $\int \frac{1 - \sqrt[4]{x}}{x - \sqrt{x}} dx;$ | 15) | $\int \frac{\sqrt[4]{x}}{1 - \sqrt{x}} dx;$ |

$$\begin{array}{lll}
16) \int \frac{\sqrt{x-2}}{x(1+\sqrt[3]{x})} dx; & 17) \int \frac{dx}{x-\sqrt[4]{x^3}}; & 18) \int \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^3} - \sqrt[6]{x^5}} dx; \\
19) \int \frac{1+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}} dx; & 20) \int \frac{\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt{x}} dx; & 21) \int \frac{dx}{x-\sqrt[3]{x}}; \\
22) \int \frac{dx}{\sqrt[6]{x} + \sqrt[3]{x}}; & 23) \int \frac{\sqrt[6]{x} + \sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[6]{x^5}} dx; & 24) \int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}} dx; \\
25) \int \frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2}} dx; & 26) \int \frac{\sqrt[3]{x} + 4}{x(1+\sqrt[3]{x})} dx; & 27) \int \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[6]{x}}{\sqrt[4]{x^3} - \sqrt[3]{x^2}} dx; \\
28) \int \frac{\sqrt{x} dx}{x + \sqrt[3]{x^2}}; & 29) \int \frac{dx}{\sqrt[4]{x} - \sqrt[3]{x}}; & 30) \int \frac{\sqrt[4]{x} - 5}{x(1+\sqrt{x})} dx.
\end{array}$$

Завдання 12. Знайти інтеграли

$$\begin{array}{lll}
1) \int \cos 5x \cos 2x dx; & 2) \int \sin 5x \sin 2x dx; & 3) \int \cos 5x \sin 2x dx; \\
4) \int \cos 3x \sin 5x dx; & 5) \int \cos 3x \cos 5x \cos 8x dx; & 6) \int \sin \frac{x}{2} \sin \frac{x}{4} dx; \\
7) \int \sin 5x \sin 9x \sin 14x dx & 8) \int \sin(5x - \frac{\pi}{4}) \cos(x + \frac{\pi}{4}) dx & 9) \int \sin 2x \sin 9x dx; \\
10) \int \sin 3x \cos 7x dx; & 11) \int \sin 4x \sin 5x \sin 7x dx; & 12) \int \cos \frac{4}{3} x \cos 3x dx; \\
13) \int \cos 2x \cos 3x \cos 7x dx & 14) \int \sin 2x \sin 8x dx; & 15) \int \sin 2x \sin 3x \sin 5x dx \\
16) \int \sin 13x \cos 17x dx; & 17) \int \cos(7x - \pi) \cos(2x + \pi) dx & 18) \int \sin 9x \sin 11x dx; \\
19) \int \sin 3x \sin 6x dx; & 20) \int \sin 2x \cos 6x dx; & 21) \int \cos 3x \cos 5x dx; \\
22) \int \cos 6x \cos 8x dx; & 23) \int \sin 4x \sin 2x dx; & 24) \int \sin 15x \cos 7x dx; \\
25) \int \sin 8x \cos 14x dx; & 26) \int \cos 4x \cos 10x dx; & 27) \int \cos 5x \cos 4x dx; \\
28) \int \sin 7x \sin 9x dx; & 29) \int \sin 9x \cos 21x dx; & 30) \int \cos 5x \cos 2x dx.
\end{array}$$

Завдання 13. Знайти інтеграли

- | | | |
|---|---|---|
| 1) $\int \frac{dx}{\sin x}$; | 2) $\int \frac{dx}{5 + 4 \sin x}$; | 3) $\int \frac{dx}{1 + \cos x}$; |
| 4) $\int \frac{dx}{3 + 5 \sin x}$; | 5) $\int \frac{dx}{8 - 4 \sin x + 7 \cos x}$; | 6) $\int \frac{dx}{1 - \sin x}$; |
| 7) $\int \frac{dx}{3 \cos x + 2}$; | 8) $\int \frac{dx}{4 + 7 \cos x}$; | 9) $\int \frac{dx}{3 - 2 \sin x + \cos x}$; |
| 10) $\int \frac{dx}{5 + 4 \sin x + 3 \cos x}$; | 11) $\int \frac{dx}{2 \sin x - \cos x + 5}$; | 12) $\int \frac{dx}{3 + 5 \cos x}$; |
| 13) $\int \frac{dx}{1 + 2 \sin x}$; | 14) $\int \frac{dx}{3 + 5 \cos x}$; | 15) $\int \frac{dx}{5 \sin x + 3 \cos x + 3}$; |
| 16) $\int \frac{\cos x dx}{1 + \cos x}$; | 17) $\int \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} dx$; | 18) $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$; |
| 19) $\int \frac{dx}{3 \sin x + 4 \cos x + 5}$; | 20) $\int \frac{\sin x}{1 - \sin x} dx$; | 21) $\int \frac{dx}{3 \cos x + 2}$; |
| 22) $\int \frac{dx}{2 - \sin x}$; | 23) $\int \frac{dx}{3 \sin x + 4 \cos x}$; | 24) $\int \frac{dx}{3 \cos x + 2}$; |
| 25) $\int \frac{dx}{1 - 5 \sin x}$; | 26) $\int \frac{dx}{4 \sin x + 3 \cos x + 5}$; | 27) $\int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x}$; |
| 8) $\int \frac{dx}{8 - 4 \sin x + 7 \cos x}$; | 29) $\int \frac{dx}{\cos x + 2 \sin x + 3}$; | 30) $\int \frac{dx}{6 \sin x - \cos x + 9}$. |

Завдання 14 Обчислити інтеграли:

- | | | |
|--------------------------------|---|---|
| 1) $\int_1^{\pi} (5x^4) dx$; | 2) $\int_0^2 (-5e^x) dx$; | 3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (4 \cos x) dx$; |
| 4) $\int_0^{\pi} \sin 3x dx$; | 5) $\int_1^2 (4x^3 - 5) dx$; | 6) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^2 x}$; |
| 7) $\int_{-2}^2 (2 + x) dx$; | 8) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$; | 9) $\int_2^3 (9x^2 + 7) dx$; |
| 10) $\int_0^3 3^x dx$; | 11) $\int_0^4 (e^x + 5) dx$; | 12) $\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 1}$; |

- 13) $\int_0^{\sqrt{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; 14) $\int_5^7 \frac{dx}{x^2-16}$; 15) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (2\cos x) dx$;
- 16) $\int_{\frac{\pi}{18}}^{\frac{\pi}{12}} \frac{dx}{\sin^2 6x}$; 17) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 4x dx$; 18) $\int_2^3 (6x^5 + 1) dx$;
- 19) $\int_1^4 (2x^{-3} + 6) dx$; 20) $\int_3^4 (4x^3 + 2) dx$; 21) $\int_0^1 (7e^x) dx$;
- 22) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (-\cos x) dx$; 23) $\int_0^2 7^x dx$; 24) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$;
- 25) $\int_2^4 \frac{dx}{x^2-9}$; 26) $\int_0^1 (-x^5 + 2) dx$; 27) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$;
- 28) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin 3x dx$; 29) $\int_0^2 \frac{dx}{x^2+4}$; 30) $\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{3}} (x^3 + 3) dx$.

Завдання 15. Обчислити інтеграли:

- 1) $\int_1^3 (3x^2 - x^2 \ln x) dx$ 2) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} (6x + 11) \sin x dx$; 3) $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^9} dx$;
- 4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (7x + 21) \cos x dx$; 5) $\int_3^4 (2x + 1) \ln x dx$; 6) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} (6x + 7) \cos x dx$;
- 7) $\int_1^2 x^7 \ln x dx$; 8) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (8x + 4) \cos x dx$; 9) $\int_2^3 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$;
- 10) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} (2x + 6) \sin x dx$; 11) $\int_2^4 \frac{\ln x}{x^2} dx$; 12) $\int_0^{\pi} (11 - 9x) \cos x dx$;
- 13) $\int_2^3 (5x - 7) \ln x dx$; 14) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (5x - 12) \sin x dx$; 15) $\int_2^3 \frac{12 \ln x}{x^3} dx$;
- 16) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (x - 7) \sin x dx$; 17) $\int_2^5 \frac{10 \ln x}{x^4} dx$; 18) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - 3x) \cos x dx$;

$$\begin{array}{lll}
19) \int_1^2 5x^3 \ln x dx; & 20) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x-1) \cos x dx; & 21) \int_1^{16} \sqrt[4]{x} \ln x dx; \\
22) \int_0^{\pi} (\pi - x) \sin x dx; & 23) \int_1^5 x^6 \ln x dx; & 24) \int_{-2}^2 (1-x) \sin \pi x dx; \\
25) \int_1^5 (7x+9) \ln x dx; & 26) \int_0^{\pi} (2x+5) \sin x dx; & 27) \int_1^2 8x^4 \ln x dx; \\
28) \int_0^{\frac{\pi}{3}} (6x+11) \sin x dx; & 29) \int_2^3 (6x^2 - 4x) \ln x dx & 30) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (14x-3) \sin x dx.
\end{array}$$

Завдання 16. Обчислити інтеграли:

$$\begin{array}{lll}
1) \int_1^2 (7x-9)^4 dx; & 2) \int_{-\frac{1}{2}}^0 6^{5x+2} dx; & 3) \int_0^2 \sqrt{8x+9} dx; \\
4) \int_{-\frac{1}{2}}^{-\frac{2}{5}} \cos(5x+3) dx; & 5) \int_{-\frac{\pi}{16}}^{\frac{\pi}{16}} \sin\left(\frac{\pi}{4} - 4x\right) dx; & 6) \int_{-\frac{1}{3}}^0 e^{4-3x} dx; \\
7) \int_1^{\frac{1}{\sqrt{9x-7}}} dx; & 8) \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) dx; & 9) \int_1^{\frac{1}{(5-3x)^2}} dx; \\
10) \int_0^1 (5x-2)^3 dx; & 11) \int_0^{\frac{\pi}{7}} \frac{dx}{\cos 7x}; & 12) \int_{-\frac{\pi}{16}}^{-\frac{\pi}{8}} \cos(8x+\pi) dx; \\
13) \int_0^1 e^{7x-12} dx; & 14) \int_{\frac{\pi}{24}}^{\frac{\pi}{12}} \frac{dx}{\sin^2 6x}; & 15) \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(7+4x)^3}; \\
16) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}; & 17) \int_0^{\frac{\pi}{15}} \sin\left(5x - \frac{\pi}{6}\right) dx; & 18) \int_2^3 \sqrt{4x-7} dx; \\
19) \int_{-\frac{\pi}{6}}^0 \sin\left(6x + \frac{\pi}{6}\right) dx & 20) \int_0^3 \sqrt{7x-2} dx; & 21) \int_0^{\frac{\pi}{12}} \cos 12x dx;
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
22) \int_1^3 \frac{dx}{(7-2x)^3}; & 23) \int_1^2 7^{3x-4} dx; & 24) \int_0^1 \sqrt[3]{(3x-2)^5} dx; \\
25) \int_1^7 \frac{dx}{\sqrt[3]{(7x-6)^2}}; & 26) \int_{-1}^0 \frac{dx}{(5x+16)^2}; & 27) \int_0^{\frac{10}{\pi}} \frac{dx}{\sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right)}; \\
28) \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)}; & 29) \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) dx; & 30) \int_9^{\sqrt[3]{9x+7}} dx.
\end{array}$$

Завдання 17. Обчислити інтеграли:

$$\begin{array}{lll}
1) \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg} x dx; & 2) \int_0^1 \frac{e^{2x} dx}{1-3e^{2x}}; & 3) \int_1^2 \frac{(8x+8)dx}{4x^2+8x-9}; \\
4) \int_{-0.1}^0 \frac{dx}{1-10x}; & 5) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\operatorname{ctg} x \cdot \sin^2 x}; & 6) \int_0^1 \frac{x^2 dx}{13-9x^3}; \\
7) \int_0^1 \frac{e^{5x} dx}{2-e^{5x}}; & 8) \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg} x dx; & 9) \int_{-2}^{-1} \frac{3x dx}{16-2x^2}; \\
10) \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x dx}{1+3\cos x}; & 11) \int_1^{\sqrt{17}} \frac{dx}{-27x+17}; & 12) \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x dx}{20-\cos x}; \\
13) \int_{-1}^0 \frac{dx}{6x+15}; & 14) \int_e^{e^2} \frac{dx}{x \cdot \ln x}; & 15) \int_1^2 \frac{(12x+1)dx}{6x^2+x}; \\
16) \int_0^1 \frac{e^x dx}{3e^x+7}; & 17) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 6x dx}{2+\sin 6x}; & 18) \int_1^2 \frac{(10x-3x^2)dx}{x^3-5x^2-6}; \\
19) \int_0^1 \frac{4^x dx}{4^x+7}; & 20) \int_2^3 \frac{(2x+1)dx}{x^2+x-3}; & 21) \int_1^2 \frac{x dx}{8x^2+5}; \\
22) \int_0^1 \frac{e^{6x} dx}{4e^{6x}+1}; & 23) \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x dx}{3\sin x+1}; & 24) \int_{-1}^0 \frac{4x^3 dx}{3x^4+11};
\end{array}$$

$$25) \int_1^2 \frac{xdx}{5x^2 - 2}; \quad 26) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\operatorname{tg} x \cdot \cos^2 x}; \quad 27) \int \frac{e^x dx}{x(\ln x + 1)};$$

$$28) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos 2x dx}{\sin x \cdot \cos x}; \quad 29) \int_0^1 \frac{e^x dx}{5 - 4e^x}; \quad 30) \int_1^2 \frac{(6x - 5)dx}{3x^2 - 5x + 4}.$$

Завдання 18. Знайти невідкладні інтеграли:

$$1) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^5}; \quad 2) \int_1^{+\infty} x e^{-x^2} dx; \quad 3) \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^2 + 9};$$

$$4) \int_0^{+\infty} \sin x dx; \quad 5) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}; \quad 6) \int_{-\infty}^0 x e^{x^2} dx;$$

$$7) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}}; \quad 8) \int_1^{+\infty} \frac{xdx}{x^3 + x}; \quad 9) \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x};$$

$$10) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x-1}}; \quad 11) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)^2}; \quad 12) \int_1^{+\infty} \frac{x^2 dx}{x^3 + 1};$$

$$13) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}; \quad 14) \int_1^{+\infty} \frac{x^3 + 1}{x^4} dx; \quad 15) \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^2 + 2x + 5};$$

$$16) \int_1^{+\infty} \frac{7-x}{x^2} dx; \quad 17) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 1}; \quad 18) \int_0^{+\infty} \frac{xdx}{x^2 + 4};$$

$$19) \int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \sqrt{\ln x}}; \quad 20) \int_0^{+\infty} \frac{xdx}{x^2 + 8}; \quad 21) \int_2^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{(x^2 + 5)^3}};$$

$$22) \int_0^{+\infty} \frac{xdx}{x^2 + 9}; \quad 23) \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + x - 2}; \quad 24) \int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^3 x};$$

$$25) \int_1^{+\infty} \frac{x^2 + 1}{x^3} dx; \quad 26) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 6x + 11}; \quad 27) \int_1^{+\infty} \frac{2xdx}{x^2 + 1};$$

$$28) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 10x + 26}; \quad 29) \int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x}; \quad 30) \int \frac{x^4 + 1}{x^5} dx.$$

Завдання 19. Знайти площу криволінійної трапеції:

- 1) $y = 2x^2 + 4, x = -1, x = 3, y = 0$ 2) $y = 2x^3 + 1, x = 1, x = 2, y = 0;$
 3) $y = -3x^2 + 12, x = -1, x = 1, y = 0;$ 4) $y = \frac{x}{5} + 5, x = 1, x = 3, y = 0;$
 5) $y = \frac{5}{x}, x = 1, x = 5, y = 0;$ 6) $y = 7x - 3, x = 2, x = 5, y = 0;$
 7) $y = \sin x, x = \frac{\pi}{4}, x = \frac{\pi}{2}, y = 0;$ 8) $y = \operatorname{tg} x, x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{\pi}{4}, y = 0;$
 9) $y = \ln x, x = e, x = e^3, y = 0;$ 10) $y = 2^x, x = 1, x = 5, y = 0;$
 11) $y = x^3 + 1, x = 1, x = 2, y = 0;$ 12) $y = -\frac{2}{x}, x = -1, x = -4, y = 0;$
 13) $y = 5x + 2, x = 0, x = 4, y = 0;$ 14) $y = x^3 - 2, x = 2, x = 4, y = 0;$
 15) $y = 0,5^x, x = -4, x = -1, y = 0;$ 16) $y = \sin x, x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{2\pi}{3}, y = 0;$
 17) $y = \operatorname{tg} x, x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{\pi}{3}, y = 0;$ 18) $y = \frac{1}{3}x - 3, x = 10, x = 15, y = 0;$
 19) $y = \frac{8}{x}, x = 2, x = 4, y = 0;$ 20) $y = 0,25^x, x = -3, x = 1, y = 0;$
 21) $y = \cos x, x = -\frac{\pi}{3}, x = \frac{\pi}{3}, y = 0;$ 22) $y = 4x + 9, x = -2, x = 6, y = 0;$
 23) $y = 3^x, x = 1, x = 3, y = 0;$ 24) $y = \ln x, x = e^2, x = e^8, y = 0;$
 25) $y = x^3 + 8, x = -1, x = 2, y = 0;$ 26) $y = \frac{-6}{x}, x = -1, x = -3, y = 0;$
 27) $y = \frac{2}{5}x + 8, x = -1, x = 10, y = 0;$ 28) $y = \cos x, x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{\pi}{2}, y = 0;$
 29) $y = x^3, x = 1, x = 4, y = 0;$ 30) $y = 4^x, x = 2, x = 3, y = 0.$

Завдання 20. Обчислити площу фігури, обмежену кривими:

- 1) $y = x^2 - 4$, $y = 4x + 1$; 2) $y = -x^2$, $x + y + 2 = 0$; 3) $y = \frac{5}{x}$, $y = 6 - x$;
4) $y = x^2 + 4x + 4$,
 $y = x + 4$; 5) $y = \frac{6}{x}$, $y = -x + 5$; 6) $y = \sqrt{x}$, $y = 0,5x$;
7) $y = \frac{12}{x}$, $y = -x + 8$; 8) $y = 4x - x^2$, $y = 4 - x$; 9) $y = -x^2 - 4x$,
 $y = x + 4$;
10) $y = x^2$, $y = 2 - x^2$; 11) $y = x^3$, $y = 2x$; 12) $y = x^2$, $y^2 = x$;
13) $y = x^2 + 1$, $y = x + 1$; 14) $y = \frac{4}{x}$, $y = 5 - x$; 15) $y = 2x^2$, $y = 3 - x^2$;
16) $y = \sqrt{x}$, $y = x$; 17) $y = x + 6$, $y = x^2$; 18) $y = \frac{7}{x}$, $x + y - 8 = 0$;
19) $y = -\frac{5}{x}$, $y = x - 6$; 20) $y = x^2$, $y = x + 2$; 21) $y^2 = 2x$, $x = 4$;
22) $xy = 1$, $x + y = 2,5$; 23) $y = \frac{2}{x}$, $y = -x + 3$; 24) $y = 6x^2$, $y = 2x^3$;
25) $y = x^2$, $y = -x^2 + 8$; 26) $y = 0,5x^2 - x + 1$,
 $y = -0,5x^2 + 3x + 6$; 27) $y = \frac{6}{x}$, $y = 7 - x$;
28) $y = -x^2$, $y = x^2 - 2$; 29) $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$; 30) $y = 4 - 2x^2$,
 $y = x - 3x + 4$.

Завдання 21. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями.

- 1) $y^2 = x$, $x = 9$; 2) $y = 2x$, $x = 2$, $y = 0$; 3) $y = x^2 + 2$,
 $y = 2x + 2$;
 $y = x^3$, $y = 0$,
4) $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$; 5) $y^2 = 2px$, $x = a$, $y = 0$; 6) $x = 0$, $x = 2$;
 $y = \frac{4}{x}$, $y = 0$,
7) $y = 2x - x^2$, $y = 0$; 8) $xy = 9$, $y = 10 - x$; 9) $x = 1$, $x = 4$;
10) $y^2 = (x - 1)^3$, $x = 2$; 11) $y = \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$; 12) $y^2 = x + 4$,
 $4 \leq x \leq 9$;

- 13) $y = \sqrt{\operatorname{tg} \frac{x}{4}}, 0 \leq x \leq \pi;$ 14) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1;$ 15) $xy = 9, y = 0,$
 $x = 1, x = 3;$
- 16) $y^2 = 4x, y = x;$ 17) $y = e^{-x} + e^x, y = 0,$
 $0 \leq x \leq 1;$ 18) $y = x\sqrt{x}, y = 0,$
 $x = 4;$
- 19) $y = x^2, y^2 = x;$ 20) $y = \sin^2 x, 0 \leq x \leq \pi;$ 21) $y = 3 - x^2,$
 $y = x^2 + 1;$
- 22) $y = \frac{6}{x}, 1 \leq x \leq 6;$ 23) $y = \sqrt{x}e^x, y = 0, x = 1;$ 24) $y = \frac{x^2}{2}, y = \frac{x^3}{8};$
- 25) $y = \sin x, y = 0;$ 26) $y^2 = 9x, y = 3x;$ 27) $x + 2y - 4 = 0,$
 $y = 0, x = 0;$
- 28) $y^2 = 6x, y = 0, x = 1,$
 $x = 3;$ 29) $y = x^2 - 9, y = 0;$ 30) $y = \cos x, y = 0,$
 $x = 0, x = \frac{\pi}{2}.$

§.4 Функції декількох змінних(основні поняття)

Приклад 1. Знайти частинні похідні функції $z = \sin xy \cdot \cos y$.

Розв'язання

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos y (\sin xy)'_x = \cos y \cdot \cos xy \cdot (xy)'_x = y \cdot \cos y \cdot \cos xy;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (\sin xy)'_y \cos y + (\cos y)'_y \cdot \sin xy = \cos xy \cdot (xy)'_y \cdot \cos y - \sin y \cdot \sin xy =$$

$$= x \cdot \cos y \cdot \cos xy - \sin y \cdot \sin xy;$$

Приклад 2. Знайти частинні похідні другого порядку для функції $z = x^6 \cdot y^7$.

Розв'язання. Знайдемо спочатку частинні похідні першого порядку, а саме:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (x^6 \cdot y^7)'_x = 6x^5 \cdot y^7; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = (x^6 \cdot y^7)'_y = 7x^6 \cdot y^6.$$

$$\text{Знайдемо } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (6x^5 \cdot y^7)'_x = 30x^4 \cdot y^7, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (7x^6 \cdot y^6)'_y = 42x^6 \cdot y^5.$$

Знайдемо мішані похідні другого порядку

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (7x^6 \cdot y^6)'_x = 42x^5 \cdot y^6; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = (6x^5 \cdot y^7)'_y = 42x^5 \cdot y^6.$$

Приклад 3. Дослідити на екстремуми функцію $z = x^3 + y^3 - 12xy$.

Розв'язання.

1. Щоб виявити стаціонарні точки, знайдемо спочатку частинні похідні першого порядку $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 12y$ і $\frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 12x$, та розв'яжемо систему

$$\begin{cases} 3x^2 - 12y = 0, \\ 3y^2 - 12x = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 4y, \\ \frac{x^4}{16} - 4x = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 0, \\ y = 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x = 4, \\ y = 4. \end{cases} \end{cases}$$

Отже ми знайшли дві стаціонарні точки $M(0;0)$ та $N(4;4)$.

2. Знайдемо частинні похідні другого порядку $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y$ і $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -12$

та запишемо визначник $\Delta = 6x \cdot 6y - (-12)^2 = 36xy - 144$.

3. Обчислимо значення визначника у кожній точці. $\Delta(0;0) = -144 < 0$, отже точка $M(0;0)$ не являється точкою екстремуму. Перевіримо точку $N(4;4)$

$\Delta(4;4) = 36 \cdot 16 - 144 = 432 > 0$, тобто точка $N(4;4)$ є точкою екстремуму.

4. Щоб вияснити, що це за екстремум, обчислимо значення частинної похідної другого порядку у точці $N(4;4)$ $\left. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right|_{(4;4)} = 6 \cdot 4 > 0$, отже це точка мінімуму.

5. $z_{\min} = z(4;4) = 4^3 + 4^3 - 12 \cdot 4 \cdot 4 = -64$.

Приклад 4. Записати подвійний інтеграл і обчислити площу фігури, обмеженої лініями: $y = \frac{9}{x}$, $y = x$, $x = 9$.

Розв'язання. Зобразимо дану фігуру і обчислимо координати точок перетину графіків функцій:

$$\begin{cases} y = \frac{9}{x}, \\ y = x, \end{cases} \begin{cases} x = 3, \\ y = 3, \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x = -3, \\ y = -3. \end{cases}$$

Точці перетину графіків $y = \frac{9}{x}$ та

$y = x$ відповідають координати $(3;3)$.

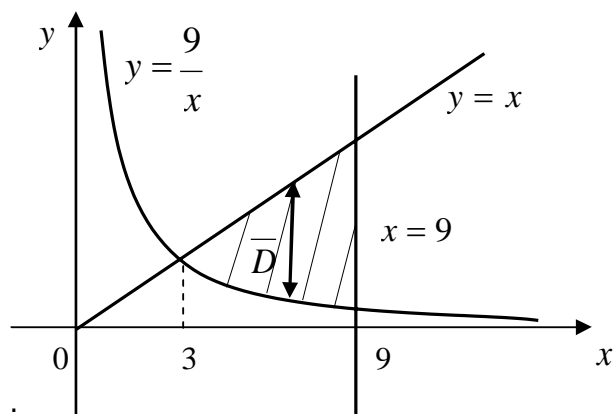
Виберемо порядок інтегрування і розставимо межі інтегрування.

Спочатку будемо інтегрувати по змінній y .

Для цього проведемо стрілку паралельну осі Oy . Тоді з рисунка отримаємо:

$$y_1 = \frac{9}{x}, \quad y_2 = x, \quad x_1 = 3, \quad x_2 = 9.$$

$$S = \iint_D dx dy = \int_3^9 dx \int_{\frac{9}{x}}^x dy = \int_3^9 y \Big|_{\frac{9}{x}}^x dx = \int_3^9 (x - \frac{9}{x}) dx = \left(\frac{x^2}{2} - 9 \ln x \right) \Big|_3^9 = \frac{81}{2} - 9 \ln 9 - \left(\frac{9}{2} - 9 \ln 3 \right) =$$



$$= 36 - 9 \ln 3 \text{ (кв.од.)}$$

Завдання для самостійної роботи

Завдання 1. Знайти частинні похідні функцій:

- | | |
|---------------------------------------|---|
| 1) а) $z = x^3 + 3x^2y - y^2;$ | б) $u = \frac{y}{x} + \frac{z}{y} - \frac{x}{z};$ |
| 2) а) $z = \ln(x^2 + y^2);$ | б) $u = xy^2z^3;$ |
| 3) а) $z = \frac{y}{x};$ | б) $u = \sqrt{x^2 + y^2 - z^2 + 2xy};$ |
| 4) а) $z = \arctg \frac{y}{x};$ | б) $u = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}};$ |
| 5) а) $z = \frac{xy}{x - y};$ | б) $u = xy + yz + zx;$ |
| 6) а) $z = xe^{-xy};$ | б) $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2};$ |
| 7) а) $z = \frac{2x - y}{x + 2y};$ | б) $u = x^3 + yz^2 + 3xy - x + z;$ |
| 8) а) $z = x^3 + 6xy^2 - 4y^3 - 2xy;$ | б) $u = \sin(x^2 + y^2 + z^2);$ |
| 9) а) $z = x^2 - 3y^2 + 5xy;$ | б) $u = \ln(x + y + z);$ |
| 10) а) $z = \frac{x}{y};$ | б) $u = x^{\frac{y}{z}};$ |
| 11) а) $z = \sqrt{x^2 - y^2};$ | б) $u = \frac{z}{x^2 + y^2};$ |
| 12) а) $z = \frac{5x - y}{x + 5y};$ | б) $u = \left(\frac{x}{y} \right)^z;$ |
| 13) а) $z = y^x;$ | б) $u = x^2 y \sin z;$ |
| 14) а) $z = x^{y^2};$ | б) $u = x^2 e^y \ln z;$ |
| 15) а) $z = e^{-\frac{y}{x}};$ | б) $u = \operatorname{tg}(3x - y) + 5^{y+z};$ |

- 16) а) $z = x^4 \cos^2 y$; б) $u = \frac{y}{x} - 2 \frac{z}{y}$;
- 17) а) $z = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$; б) $u = zx + x^3 yz + 3x^2 y - zy^2$;
- 18) а) $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$; б) $u = z \ln(x^2 + y^2 - z)$;
- 19) а) $z = x^3 y - y^3 x$; б) $u = z^5 x - x^4 \cos^2 y$;
- 20) а) $z = (5x^2 y - y^3 + 7)^3$; б) $u = \frac{5x - z}{x + zy}$;
- 21) а) $z = \ln(x + \ln y)$; б) $u = \frac{x}{\sqrt{z^2 + y^2}}$;
- 22) а) $z = xy \ln(x + y)$; б) $u = z \sqrt{x^2 - y^2}$;
- 23) а) $z = x^{xy}$; б) $u = \sin(x^3 + y^2 - 5z)$;
- 24) а) $z = \sin(xy) \cos(xy)$; б) $u = z \lg(x^2 - 5xyz)$;
- 25) а) $z = 5^{\frac{y}{x}}$; б) $u = (5x^2 z - y^3 + 7z - 3x + 8)^4$;
- 26) а) $z = e^x \cos y$; б) $u = \arcsin(x^2 y - 5z)$;
- 27) а) $z = (x^2 + y^2)^3$; б) $u = z^x + \lg(x^2 - 5xy)$;
- 28) а) $z = \sin(x^3 + y^2)$; б) $u = xz^5 - 7^{\frac{y}{x}}$;
- 29) а) $z = \arcsin(2x - 3y)$; б) $u = z^7 e^x \cos y$;
- 30) а) $z = \lg(x^2 - 5xy)$; б) $u = \frac{zy}{x^2 - zy}$.

Завдання 2. Знайти частинні похідні другого порядку для функцій:

- 1) $z = 3x^2 - 2xy + 5y^2$; 2) $z = e^{x+y^2}$; 3) $z = 3x^y$;
- 4) $z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$; 5) $z = x^2 y - xy^2 + 5$; 6) $z = \sin(x^2 - 2y^3)$;

- 7) $z = \ln(x^2 - \sin y)$; 8) $z = 2^y + 2x^2$; 9) $z = \sqrt[3]{x} + \operatorname{arctg} y$;
- 10) $z = x^2 - y^2$; 11) $z = xy(x^3 + y^3 - 5)$; 12) $z = e^{xy}$;
- 13) $z = x^y$; 14) $z = \frac{x}{x+y}$; 15) $z = y^2(1 - e^x)$;
- 16) $z = \ln(x^2 + y)$; 17) $z = y \sin \frac{y}{x}$; 18) $z = \arcsin xy$;
- 19) $z = \frac{x^2}{1-2y}$; 20) $z = \frac{1}{y} e^{xy}$; 21) $z = x^3 + 3xy(y-x)$;
- 22) $z = x \sin^2 y$; 23) $z = \frac{x}{\sqrt[3]{y}}$; 24) $z = \frac{xy}{x-y}$;
- 25) $z = \ln(2x - 5y)$; 26) $z = x \sin(xy) + \cos(xy)$; 27) $z = \ln(x^2 + y^2)$;
- 28) $z = \frac{x-y}{x+y}$; 29) $z = y \ln x$; 30) $z = \sqrt{2xy + y^2}$.

Завдання 3. Дослідити на екстремум функцію:

- 1) $z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$; 2) $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$;
- 3) $z = e^{2x}(x + y^2 + 2y)$; 4) $z = \frac{x^2}{10} - \frac{y^2}{6}$;
- 5) $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$; 6) $z = 3x^2 - x^3 + 3y^2 + 4y$;
- 7) $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$; 8) $z = x^3 - 3xy + y^3$;
- 9) $z = 2x^3 + 2y^2 - 36xy + 30$; 10) $z = x^2 + xy + y^2 + 2x - 2y + 7$;
- 11) $z = x^4 + y^4 - 2x^2 - 4xy - 2y^2$; 12) $z = 4x - 4y - x^2 - y^2$;
- 13) $z = 2x^2 + y^2 - 8x + 26$; 14) $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 27$;
- 15) $z = xy(1 - x - y)$; 16) $z = x^3 - 6xy + y^2 - 39x + 18y + 20$;
- 17) $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$; 18) $z = 2x^2 - 3y^2 + 4x + 6y + 3$;
- 19) $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$; 20) $z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$;
- 21) $z = x^3 + 6xy + 8y^3 - 1$; 22) $z = 2xy - 2x - 6y + 5$;
- 23) $z = x^3 - 6xy + 8y^3 + 1$; 24) $z = x^3 + xy^2 + 6xy$;
- 25) $z = x^2 + xy + 2y^2 - x + y$; 26) $z = -x^2 - 4y^2 + 5x - 8y + 3$;
- 27) $z = x^4 + 2y^4 + 3$; 28) $z = 3x^2 - y^2 + 4y + 5$;

29) $z = x^2 + y^2 - 8x - 2;$

30) $z = e^{\frac{x}{2}}(x + y^2).$

Завдання 4. Обчислити подвійний інтеграл по області D, якщо D - прямокутник :

1) $\iint_D (x - y) dx dy, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 1 \leq y \leq 2;$

2) $\iint_D \sqrt{xy} dx dy, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1;$

3) $\iint_D \sqrt{x - y} dx dy, \quad 2 \leq x \leq 3, \quad 1 \leq y \leq 2;$

4) $\iint_D (x^2 - y) dx dy, \quad 0 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq 1;$

5) $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy, \quad 0 \leq x \leq 3, \quad 0 \leq y \leq 6;$

6) $\iint_D (x + y^2) dx dy, \quad 0 \leq x \leq 6, \quad 0 \leq y \leq 6;$

7) $\iint_D (xy^2) dx dy, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 3;$

8) $\iint_D (x^2 y) dx dy, \quad -2 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq 4;$

9) $\iint_D (2x + 1)y^2 dx dy, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad -2 \leq y \leq 3$

10) $\iint_D (5x^2 y - 3y) dx dy, \quad 0 \leq x \leq 3, \quad 0 \leq y \leq 2;$

11) $\iint_D (x\sqrt{y} - x^2) dx dy, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 1 \leq y \leq 4;$

12) $\iint_D \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) dx dy, \quad 1 \leq x \leq 2, \quad 1 \leq y \leq 2;$

13) $\iint_D (xe^y - y^2) dx dy, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1;$

14) $\iint_D (x\sqrt{x} + 2y) dx dy, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 4;$

15) $\iint_D (xe^{x+y}) dx dy, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1;$

16) $\iint_D x^2 \sqrt{2y + 1} dx dy, \quad 0 \leq x \leq 3, \quad 0 \leq y \leq 4;$

17) $\iint_D \cos xe^y dx dy, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}, \quad 0 \leq y \leq 1;$

18) $\iint_D e^x(1 + 2y) dx dy, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 3;$

19) $\iint_D \sin(x + y) dx dy, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}, \quad 0 \leq y \leq \frac{\pi}{4};$

20) $\iint_D (6x^2 + 4x) \sqrt{y} dx dy, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 4 \leq y \leq 9;$

21) $\iint_D (x + y + 1) dx dy, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 2;$

22) $\iint_D xy dx dy, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 2;$

23) $\iint_D (2x^2 + y) dx dy, \quad 0 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq 1;$

24) $\iint_D (x^2 - 3y^2) dx dy, \quad 0 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq 1;$

25) $\iint_D (x^2 - 4y) dx dy, \quad 0 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq 4;$

26) $\iint_D (2x^2 + 5y) dx dy, \quad 1 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq 1;$

27) $\iint_D (\sqrt{x} + y^2) dx dy, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 4;$

28) $\iint_D (xy^2) dx dy, \quad 0 \leq x \leq 3, \quad 0 \leq y \leq 1;$

29) $\iint_D (\sqrt{x} y^3) dx dy, \quad 0 \leq x \leq 4, \quad 0 \leq y \leq 2;$

30) $\iint_D \left(\frac{x}{y} + y^2 \right) dx dy, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1;$

Розділ III. Диференціальні рівняння. Ряди

§ 1 Диференціальні рівняння

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y' = x(y^2 + 1)$.

Розв'язання. $y' = \frac{dy}{dx}$, отже, $\frac{dy}{dx} = x(y^2 + 1)$; $\frac{dy}{y^2 + 1} = x dx$.

Отримали рівняння, в якому змінні відокремлені. Проінтегруємо його:
 $\int \frac{dy}{y^2 + 1} = \int x dx$, $\arctg y = \frac{1}{2} x^2 + C$, $y = \operatorname{tg} \left(\frac{1}{2} x^2 + C \right)$ - загальний розв'язок рівняння.

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y' = x(y - 1)$.

Розв'язання. $y' = x(y - 1)$; $\frac{dy}{dx} = x(y - 1)$; $\frac{dy}{y - 1} = x dx$.

Отримали рівняння, в якому змінні відокремлені. Проінтегруємо його:

$$\int \frac{dy}{y - 1} = \int x dx \quad \ln|y - 1| = \frac{1}{2} x^2 + \ln C; \quad y - 1 = e^{\frac{1}{2} x^2 + \ln C}; \quad y - 1 = C \cdot e^{\frac{x^2}{2}} \quad y = 1 + C \cdot e^{\frac{x^2}{2}}.$$

Приклад 3. Розв'язати диференціальне рівняння: $y' = \frac{y}{x} \left(\ln \frac{y}{x} + 1 \right)$.

Розв'язання. В даному випадку рівняння є однорідним. Робимо заміну $y = u \cdot x$, тоді

$$y' = u'x + u. \quad \text{Після підстановки одержуємо } u'x + u = u(\ln u + 1) \Rightarrow$$

$$u'x = u(\ln u); \quad x \frac{du}{dx} = u \ln u; \quad \frac{du}{u \ln u} = \frac{dx}{x}; \quad \int \frac{du}{u \ln u} = \int \frac{dx}{x} + C$$

$$\ln(\ln u) = \ln x + \ln C; \quad \ln u = Cx; \quad u = e^{Cx}.$$

Оскільки $u = \frac{y}{x}$, то $y = x \cdot e^{Cx}$ - загальний розв'язок даного рівняння.

Приклад 4. Розв'язати диференціальне рівняння $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$.

Розв'язання. За методом Бернуллі розв'язок цього рівняння знайдемо у вигляді $y = u \cdot v$, де u і v - невідомі функції. Тоді $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$. Підставимо у дане рівняння замість y та y' відповідні вирази і одержимо: $u' \cdot v + u \cdot v' + 2xu \cdot v = 2xe^{-x^2}$. Винесемо із другого та третього доданків спільний множник u за дужки:

$$u' \cdot v + u \cdot (v' + 2x \cdot v) = 2xe^{-x^2}.$$

Виберемо функцію v так, щоб вираз у дужках дорівнював нулю

$$v' + 2x \cdot v = 0.$$

Одержане рівняння є рівнянням з відокремленими змінними. Розв'яжемо його і знайдемо функцію v :

$$\frac{dv}{dx} = -2xv; \quad \frac{dv}{v} = -2x dx; \quad \ln|v| = -\int 2x dx + \ln C; \quad \ln|v| = -x^2 + \ln C; \quad v = Ce^{-x^2}.$$

Для визначеності візьмемо $C = 1$, тоді $v = e^{-x^2}$.

Повернемося до нашого рівняння і підставимо замість v знайдений вираз

$$u' \cdot e^{-x^2} = 2xe^{-x^2}; \quad u' = 2x; \quad \frac{du}{dx} = 2x; \quad u = \int 2x dx; \quad u = x^2 + C.$$

Отже, загальний розв'язок даного рівняння: $y = (x^2 + C)e^{-x^2}$.

Приклад 5. Розв'язати рівняння $(x^2 + 2xy)dx + (x^2 - y^2)dy = 0$.

Розв'язання.

Функцію $u = u(x, y)$, повний диференціал якої дорівнює лівій частині даного рівняння, будемо шукати у вигляді $u(x, y) = \int M(x; y)dx + \varphi(y)$.

$$u(x, y) = \int (x^2 + 2xy)dx = \frac{x^3}{3} + x^2y + \varphi(y).$$

З іншого боку $u(x, y) = \int N(x; y)dy + \psi(x)$, тому $u(x, y) = \int (x^2 - y^2)dy = x^2y - \frac{y^3}{3} + \psi(x)$.

$$\text{Отже, } u(x, y) = \frac{x^3}{3} + x^2y - \frac{y^3}{3} + C.$$

Загальний інтеграл $x^3 + 3x^2y - y^3 = C$.

Приклад 6. Розв'язати рівняння $y^{(4)} = \sin 3x$.

Розв'язання. Проінтегруємо цю рівність 4 рази.

$$y'''' = \sin 3x dx = -\frac{1}{3} \cos 3x + C;$$

$$y''' = \int \left(-\frac{1}{3} \cos 3x + C \right) dx = -\frac{1}{9} \sin 3x + C_1 x + C_2;$$

$$y'' = \int \left(-\frac{1}{9} \sin 3x + C_1 x + C_2 \right) dx = \frac{1}{27} \cos 3x + \frac{1}{2} C_1 x^2 + C_2 x + C_3;$$

$$y' = \int \left(\frac{1}{27} \cos 3x + \frac{1}{2} C_1 x^2 + C_2 x + C_3 \right) dx = \frac{1}{81} \sin 3x + \frac{1}{6} C_1 x^3 + \frac{1}{2} C_2 x^2 + C_3 x + C_4.$$

Отже, загальним розв'язком даного рівняння є функція

$$y = \frac{1}{81} \sin 3x + \frac{C_1 x^3}{6} + \frac{C_2 x^2}{2} + C_3 x + C_4.$$

Приклад 7. Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$\text{а) } y' + 5y' + 6y = 0; \quad \text{б) } y' + 2y' + 5y = 0. \quad \text{в) } y' + 4y' + 4y = 0$$

Розв'язання. а) Дане диференціальне рівняння є лінійним однорідним. Складемо його характеристичне рівняння $k^2 + 5k + 6 = 0$. Коренями цього рівняння є різні дійсні числа $k_1 = -2$, $k_2 = -3$. Тому загальний розв'язок заданого рівняння має вигляд

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x}.$$

б) Характеристичне рівняння в цьому випадку буде таким: $k^2 + 4k + 5 = 0$. Оскільки корені характеристичного рівняння є комплексними числами $k = -1 \pm 2i$, то загальний розв'язок запишемо у вигляді $y = e^{-x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$.

в) Характеристичне рівняння $k^2 + 4k + 4 = 0$ має однакові корені $k_1 = k_2 = -2$. Тому загальним розв'язком диференціального рівняння є: $y = e^{-2x} (C_1 + C_2 x)$.

Завдання для самостійної роботи

Завдання 1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

- | | |
|---|---|
| 1) $y dx + x dy = 0;$ | 2) $(y - 1)^2 dx + (1 - x)^3 dy = 0;$ |
| 3) $x \sqrt{9 - y^2} dx - y(4 + x^2) dy = 0;$ | 4) $\cos x \cos y dx - \sin x \sin y dy = 0;$ |
| 5) $\ln x \sin^3 y dx + x \cos y dy = 0;$ | 6) $(xy^2 - y^2) dx - (x^2 y + x^2) dy = 0;$ |
| 7) $x dy - y \ln y dx = 0;$ | 8) $3x^2 (y + 1) dx + (x^3 + 1) dy = 0;$ |
| 9) $3x^2 \sqrt{1 - y^2} dx + e^{x^3} dy = 0;$ | 10) $y^2 dx + x dy = 0;$ |
| 11) $2x^2 y dy + (y^2 - 2) dx = 0;$ | 12) $\ln \cos y dx + x \operatorname{tg} y dy = 0;$ |
| 13) $(y + 2) dx + dy = 0;$ | 14) $(2y + 1) \operatorname{ctg} x dx - dy = 0;$ |
| 15) $(3x + 1) y dx + 2 dy = 0;$ | 16) $(x - xy^2) dx - (y - yx^2) dy = 0;$ |
| 17) $4xy dx + (x^2 + 1) dy = 0;$ | 18) $(x^2 + 16) dy + (y - 7) dx = 0;$ |
| 19) $(y^3 + 1) dx + 2xy^2 dy = 0;$ | 20) $\operatorname{tg} x dy - y \ln y dx = 0;$ |
| 21) $(y^2 + 9) dx - \cos^2 x dy = 0;$ | 22) $2\sqrt{x} \cos y dy - 9 dx = 0;$ |
| 23) $10 dx + \sin y \sqrt{4 - x^2} dy = 0;$ | 24) $\sqrt{1 - y^2} \cos x dx - 5 dy = 0.$ |
| 25) $dx + (y + 7) \cos^2 x dy = 0;$ | 26) $\sqrt{y} \cos x dx + dy = 0;$ |
| 27) $(x + 7) dy + (y^2 + 1) dx = 0;$ | 28) $\sin y dx + \sqrt{x^2 - 4} \cos y dy = 0;$ |
| 29) $x^2 dy - (2xy + 3y) dx = 0;$ | 30) $(y^2 + 1) dx - \sqrt{x} dy = 0.$ |

Завдання 2 Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

- | | |
|---|---|
| 1) $4y' + (x + 5) \cos^2 y = 0;$ | 2) $2\sqrt{x} \cos y y' - 9 = 0;$ |
| 3) $10 + \sin y \sqrt{4 - x^2} y' = 0;$ | 4) $e^x y = (e^{2x} + 25) y';$ |
| 5) $x^3 dy + x^2 y dx = 0;$ | 6) $(y^4 + y^2 + 1) y' - y^3 \sin x = 0;$ |
| 7) $1 + (y + 7) \cos^2 x y' = 0;$ | 8) $\sqrt{y} \cos x + y' = 0;$ |

- 9) $y' - \sin x \sqrt{\phi - y^2} = 0$;
- 10) $(x + 7)y' + (y^2 + 1) = 0$;
- 11) $e^x \sin^2 y + y' = 0$;
- 12) $e^y y' - (e^{2y} + 1) \cos x = 0$;
- 13) $(e^{3y} + 2) + xe^{3y} y' = 0$;
- 14) $y' = (2y + 1) \operatorname{ctgx}$;
- 15) $xy' = y \ln y$;
- 16) $x^2 y' + y = 0$;
- 17) $2\sqrt{x} y' = y$;
- 18) $(x^2 + 1)y' + y^2 + 1 = 0$;
- 19) $y' + y \operatorname{tg} x = 0$;
- 20) $2x^2 y y' + y^2 = 2$;
- 21) $(x^2 - 4)y' = 2xy$;
- 22) $(2x - 1)y' = xy$;
- 23) $y' = \frac{y \ln y}{x^2}$;
- 24) $y' - \cos x \sqrt{4 - y^2} = 0$;
- 25) $y' = (2y + 1) \operatorname{tg} x$;
- 26) $3 + (y + 2) \sin^2 x y' = 0$;
- 27) $x^2 y' + y^2 = 0$;
- 28) $(x + 5)y' + (y^2 + 4) = 0$;
- 29) $xy' + y = y^2$;
- 30) $\sqrt{\sin x} + 2y' = 0$.

Завдання 3. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

- 1) $(x + y)dx + 2xdy = 0$;
- 2) $(x^2 - xy)dy + y^2 dx = 0$;
- 3) $(x^2 + 3xy + y^2)dx - x^2 dy = 0$;
- 4) $xdy - ydx = ydy$;
- 5) $xyy' - y^2 = 5x^2$;
- 6) $x^2 dy + y^2 dx = xydx$;
- 7) $y' = \frac{y}{x} + e^x$;
- 8) $y' = \frac{y}{x} \left(\frac{1}{\ln y} - \frac{1}{\ln x} \right)$;
- 9) $xdy + (x + 2y)dx = 0$;
- 10) $x^2 + y^2 - 2xyy' = 0$;
- 11) $(x^2 + y^2)dx - xydy = 0$;
- 12) $(xy + y^2)dx - x^2 dy = 0$;
- 13) $xy^2 dy = (x^3 + y^3)dx$;
- 14) $(4x^2 - 3xy - y^2)dx - x^2 dy = 0$;
- 15) $y' = \frac{y^2}{xy - x^2}$;
- 16) $y' = \frac{2x^2 + xy - 2y^2}{x^2}$;
- 17) $y' = \frac{y}{xy + x^2}$;
- 18) $y' = \frac{xy + y^2}{x^2}$;

19) $y' = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} + y}{x};$

20) $y' = \frac{x+y}{x-y};$

21) $xdy = (y + \sqrt{x^2 + y^2})dx;$

22) $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2};$

23) $y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2};$

24) $y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y};$

25) $y' = \frac{y}{x} + \sin \frac{y}{x};$

26) $y = x \left(y' - e^{\frac{y}{x}} \right);$

27) $(x + 2y)dx - xdy = 0;$

28) $x^2 y' + y^2 = xy y';$

29) $2\sqrt{xy} - x + yy' = 0;$

30) $(x^2 + 2xy)dx + xydy = 0.$

Завдання 4. Розв'язати диференціальне рівняння

1) а) $xy' - 2y = x^4;$

б) $x^4 y' + 4x^3 y = 3;$

в) $y' - y \operatorname{ctg} x = \cos x;$

2) а) $x^2 y' - 3xy = x + 4;$

б) $2xy' + 3y = x^5;$

в) $x^3 y' - 4x^2 y = x^4 + 2$

3) а) $3x^2 y' - xy = x^2 - 2x + 3;$

б) $xy' + 5y = 2x^6;$

в) $x^5 y' + 2x^4 y = x^2 + 3$

4) а) $y' \sin x - y \cos x = \sin 2x;$

б) $2x^2 y' - 4xy = x^3 - 5$

в) $2xy' + 6y = 5x^7;$

5) а) $y' - y \operatorname{tg} x = 4;$

б) $x^6 y' - 2x^5 y = x^4 + 1$

в) $5xy' + 10y = x^8;$

6) а) $x^3 y' + 5x^2 y = 2x - 3;$

б) $x^2 y' - 3xy = 5x^2 + 1$

в) $y' \operatorname{tg} x + y = 8;$

7) а) $2x^4 y' + 4x^3 y = x^3 - 4;$

б) $xy' + 8y = x^{10};$

в) $y' - y \operatorname{ctg} x = \sin x;$

8) а) $(x + 5)y' + y = 5(x + 5)^4;$

б) $y' - \frac{3y}{x} = x;$

в) $y' + y \cos x = \sin 2x$

9) а) $xy' + y = \ln x + 1;$

б) $y' + \frac{2y}{x} = \frac{e^{-x^2}}{x};$

в) $y' + 3x^2 y = 2xe^{-x^3}$

10) а) $y' - 3y \sin x = e^{-3 \cos x} \sin 3x$

б) $y' + y = x;$

в) $y' - y = e^x.$

11) а) $y' - y \operatorname{ctg} x = \frac{1}{\sin x};$

б) $y' - \frac{y}{x} = 3x;$

в) $y' + 4 \frac{y}{x} + x = 0;$

12) а) $x^2 y' + 2xy - 1 = 0;$

б) $y' - 7y = 8e^{3x};$

в) $y'x + y = x + 1;$

13) а) $y' \cos x - y \sin x = \cos^2 x$

б) $xy' \ln x = 5x - y;$

в) $y' \cos^2 x + y = \operatorname{tg} x$

- 14) а) $y'(x^2 + 4) - xy = \sqrt{x^2 + 4}$ б) $y' + 3y = xe^{-3x}$; в) $y'(1 - x^2) = xy + 1$
- 15) а) $(x^2 + 1)y' + 4xy = 6$; б) $y' + e^x y = e^{2x}$; в) $y' + xy = -x^3$;
- 16) а) $xy' \ln x = \ln x + y$; б) $xy' + 2y = \cos 6x$; в) $xy' - y = x^3$;
- 17) а) $xy' - y = -2 \ln x$; б) $x^3 y' + 3x^2 y = 2$; в) $xy' + 5y = x^{-3} \cos x$
- 18) а) $(x^2 + 1)y' - xy = x^3 + x$; б) $xy' + y = x + 1$; в) $xy' - y = -\ln x$;
- 19) а) $y' - 4xy = e^{2x^2}$; б) $2xy' + y = 2x^3$; в) $y'x - y = x^2 \sin x$
- 20) а) $y' + \frac{2y}{x} = \frac{1}{x^3}$; б) $y' - y \sin x = \sin x \cos x$ в) $y' - 2xy = e^{x^2}$.
- 21) а) $xy' = x^3 + y$; б) $y' = e^{2x} - e^x y$; в) $xy' + 9y = \frac{8}{x}$;
- 22) а) $y'x + y - e^x = 0$; б) $y'x + 2y = x^3$; в) $y' - y = e^x$;
- 23) а) $7y' - 4xy = 7x$; б) $y' - 2y = e^{2x}$; в) $xy' + y = x^2 e^{\frac{x}{2}}$;
- 24) а) $xy' - 4y = x + 1$; б) $xy' - y = x + 1$; в) $y' \cos x + y \sin x = 1$
- 25) а) $y' - \frac{y}{x} = \frac{1}{x^2}$; б) $y' + y = x$; в) $y' + 3y = 14e^{4x}$;
- 26) а) $xy' - 3y = x^3 + 1$; б) $y' - 2xy = x$; в) $y' = x - \frac{2y}{x}$;
- 27) а) $y' - 2y = e^{2x}$; б) $y' + \frac{2y}{x} = \frac{1}{x^2 + 1}$; в) $y' + 2y \operatorname{ctg} x = \frac{1}{\sin x}$;
- 28) а) $xy' - 2y = 2x^4$; б) $xy' + (x + 1)y = 3x^2 e^{-x}$ в) $xy' - x^2 + 2y = 0$;
- 29) а) $y' + xy = x$; б) $y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^2$; в) $y' = -\frac{x+y}{x}$;
- 30) а) $y' - y \operatorname{ctg} x = \sin x$; б) $y' + \frac{2y}{x} = \frac{1}{x^2}$; в) $y' - \frac{3y}{x} = e^x x^3$.

Завдання 5. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння.

- 1) а) $(2xy - 3)dx + (x^2 + 1)dy = 0$; б) $(2xy^3 + 4y)dx + (3x^2 y^2 + 4x)dy = 0$;
- 2) а) $(x^2 + y^2)dx + 2xydy = 0$; б) $(4x + 3y)dx + (3x + 3y^2)dy = 0$;
- 3) а) $(20xy + 5)dx + (10x^2 + 5y^4)dy = 0$; б) $(y^2 - 12x^3 y^5)dx + (2xy - 15x^4 y^4)dy = 0$;
- 4) а) $(8x - 4y + 4)dx + (2y - 4x - 2)dy = 0$; б) $(6xy - 12)dx + (3x^2 + 3y^2 - 15)dy = 0$;

- 5) a) $(2y^2 - 6xy)dx + (4xy - 3x^2)dy = 0$; б) $y(4x^3 + y^3 - 3)dx + x(x^3 + 4y^3 - 3)dy = 0$;
- 6) a) $(x^2 - y)dx + (y^2 - x)dy = 0$; б) $(3x^2 + 2y)dx + (2x - 3)dy = 0$;
- 7) a) $(6x - 2\sqrt{y} - 8)dx + \left(1 - \frac{x}{\sqrt{y}}\right)dy = 0$; б) $y^2dx + (2xy - 1)dy = 0$;
- 8) a) $(x^2 + 3y^2)dx + 6xydy = 0$; б) $(3x^2 + 6y^2 - 2y)dx + (12xy - 12y^2 - 2x)dy = 0$;
- 9) a) $(x^2 + 6xy)dx + (3x^2 - 2y)dy = 0$; б) $(2x + 5y)dx + (5x - 6y)dy = 0$;
- 10) a) $(2x + y - 12)dx + (2y + x - 3)dy = 0$; б) $(3x^2 - 6y)dx + (24y^2 - 6x)dy = 0$;
- 11) a) $(2x - y - 1)dx + (2y - x - 1)dy = 0$; б) $(6y - 2xy - y^2)dx + (6x - x^2 - 2xy)dy = 0$;
(3) (- 3x^2)
- 12) a) $(y^2 + x)dx + (2xy - 3y^2)dy = 0$; б) $28x - 6x\sqrt{y}dx + \left(3\sqrt{y} - \frac{\sqrt{y}}{2}\right)dy = 0$;
- 13) a) $\left(15x^2 - \frac{3y}{\sqrt{x}}\right)dx + (9y^2 - 6x)dy = 0$; б) $(4x^3 - 2x - 2y)dx + (4y^3 - 2x - 2y)dy = 0$;
- 14) a) $(6\sqrt{x} + 10xy)dx + (5x^2 - 6y^2)dy = 0$; б) $(4x^3 - 4x - 4y)dx + (4y^3 - 4x - 4y)dy = 0$;
- 15) $(3x^2 + 6y)dx + (6x + 24y^2)dy = 0$ б) $\left(2x \ln y - \frac{1}{\cos^2 x}\right)dx + \left(\frac{x^2}{y} - \frac{1}{\sin y}\right)dy = 0$;
a) ;
- 16) a) $(x - \cos y)dx + (x \sin y + \cos y)dy = 0$; б) $\left(2x^2 - x\right)dx + \left(y - e \cos y\right)dy = 0$;
- 17) a) $(x^2 + y - ye^x)dx + (x + 2y - e^x)dy = 0$; б) $\left(4 - \frac{y^2}{x^2}\right)dx + \frac{2y}{x}dy = 0$;
- 18) a) $e^{-y}dx + (1 - xe^{-y})dy = 0$; б) $\left(y^3 - y\right)dx + \left(1 + 3xy^2 + \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\right)dy = 0$;
(x^2) (x)
- 19) a) $3x^2e^y dx + (x^3e^y - 1)dy = 0$; б) $\left(2x \ln y - \frac{1}{\cos^2 x}\right)dx + \left(\frac{x^2}{y} - \frac{1}{\sin y}\right)dy = 0$;
- 20) a) $(x \cos 2y + 1)dx + (-x^2 \sin 2y)dy = 0$; б) $\left(\ln \frac{x}{y} + 1\right)dx - \frac{x}{y}dy = 0$;
- 21) a) $\left(y + \frac{1}{x}\right)dx + \left(\frac{1}{y+x}\right)dy = 0$; б) $\frac{2x}{x^2+y^2}dx + \frac{2y}{x^2+y^2}dy = 0$;

- 22) а) $2x \cos 4y dx - 4x^2 \sin 4y dy = 0$; б) $2e^{2x-3y} dx + (2y - 3e^{2x-3y}) dy = 0$;
- 23) а) $\left(\frac{x}{x^2+1} - y\right) dx - x dy = 0$; б) $(2x \cos^2 y) dx + (2y - x^2 \sin 2y) dy = 0$;
- 24) а) $\frac{y}{\cos^2 xy} dx + \frac{x}{\cos^2 xy} dy = 0$; б) $\left(\frac{2}{2x+y^2} + 1\right) dx + \left(\frac{2y}{2x+y^2} + 3y^2\right) dy = 0$;
;
- 25) а) $(12xy + \sin y) dx + (6x^2 + x \cos y) dy = 0$ б) $(3y^3 - y \sin x) dx + (9xy^2 + \cos x) dy = 0$;
- 26) а) $\left(\frac{4x}{x^2+3} - 8y\right) dx - 8x dy = 0$; б) $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + 1\right) dx + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + 1\right) dy = 0$;
;
- 27) а) $\left(1 + 1,5 \sqrt{\frac{y}{x}}\right) dx + \left(1,5 \sqrt{\frac{x}{y}} - 3\right) dy = 0$; б) $\left(\ln y + \frac{y^2}{x}\right) dx + \left(\frac{x}{y} + 2y \ln x\right) dy = 0$;
- 28) а) $-\frac{2y \ln y}{x^3} dx + \frac{\ln y + 1}{x^2} dy = 0$; б) $\left(\sqrt{\frac{y}{x}} + 4y \cos 2x\right) dx + \left(2 \sin 2x + \sqrt{\frac{x}{y}}\right) dy = 0$;
;
- 29) а) $(\operatorname{tg} y - 3x^2 y^2) dx + \left(\frac{x}{\cos^2 y} - 2yx\right) dy = 0$ б) $-\frac{1}{y} \operatorname{tg} x dx + \frac{x}{y^2} \operatorname{tg} x dy = 0$;
- 30) $(1 + x\sqrt{x^2 + y^2}) dx + y(\sqrt{x^2 + y^2} - 1) dy = 0$; б) $2xy^4 dx + (4x^2 y^3 + \cos y) dy = 0$.

Завдання 6. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

- 1) $y' = \sin \frac{x}{2}$; 2) $y' = \cos 3x$; 3) $y''' = e^{-2x}$;
- 4) $y'' = 5x^4 - 2x^3 + x^2$; 5) $y' = \ln x$; 6) $y''' = \sin 3x$;
- 7) $y''' = 2e^{\frac{x}{4}}$; 8) $y'' = 2x^4 - \sqrt[5]{x^3} + 7$; 9) $y' = \frac{2 \cos x}{\sin^3 x}$;
- 10) $\sqrt{1-x^2} y'' - 1 = 0$; 11) $y'' = \sin x$; 12) $y''' = \frac{1}{x^3}$;
- 13) $y'' = 27e^{3x} + 120x^3$; 14) $y' = \sin x + x$; 15) $y'' = \frac{1}{4\sqrt{x}}$;
- 16) $y'' = \cos \frac{x}{5}$; 17) $xy' = 1 + x^2$; 18) $y'' = x^2 + e^{3x}$;
;
- 19) $y' = x \sin 5x$; 20) $y'' = 2x^3 - 3x$; 21) $y' = \cos^2 x$;

$$22) (1+x^2)y' - 1 = 0; \quad 23) y' = \frac{2 \cos x}{\sin^3 x}; \quad 24) y' \sin^2 x = 1;$$

$$25) y'' \sin^4 x = \sin 2x; \quad 26) x^2 y' = 2\sqrt{x} - x^3; \quad 27) y' = 27e^{3x} + 120x^3$$

$$28) y' \cos^3 x = 3 \sin x; \quad 29) y' = x \cos 2x; \quad 30) y' = \sin^2 x.$$

Завдання 10. Знайти загальний розв'язок однорідного рівняння:

$$1) \frac{d^2 x}{dt^2} - 2 \frac{dx}{dt} - 3x = 0; \quad 2) y' + 2y' + 5y = 0; \quad 3) y' + 8y' + 16y = 0;$$

$$4) y' + 7y' - 8y = 0; \quad 5) y' + 10y' + 25y = 0; \quad 6) y' + 5y' - 14y = 0;$$

$$7) 0,5y' - 3y' + 17y = 0; \quad 8) y' + 8y' + 16y = 0; \quad 9) y' + y' - 12y = 0;$$

$$10) y' - 6y' - 9y = 0; \quad 11) y' - y' - 12y = 0; \quad 12) y' - 2y' + 10y = 0;$$

$$13) y' - y' - 20y = 0; \quad 14) y' - 4y' + 20y = 0; \quad 15) y' - y' - 30y = 0;$$

$$16) y' - 8y' + 25y = 0; \quad 17) y' - 6y' - 7y = 0; \quad 18) y' + 12y' + 36y = 0;$$

$$19) y' + 4y = 0; \quad 20) \frac{d^2 s}{dt^2} + 2 \frac{ds}{dt} + 2s = 0; \quad 21) \frac{d^2 s}{dt^2} + 7 \frac{ds}{dt} = 0;$$

$$22) y' - 2y' - 3y = 0; \quad 23) \frac{d^2 \rho}{d\varphi^2} + \rho = 0; \quad 24) y' - 8y = 0;$$

$$25) y' - 4y = 0; \quad 26) y' - 4y' + 13y = 0; \quad 27) y' - 4y' + 4y = 0;$$

$$28) y' - 3y' - 4y = 0; \quad 29) y' - 4y' + 3y = 0; \quad 30) y' + 3y' + 2y = 0.$$

§ 2. Ряди

Приклад 1. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5^n}$.

Розв'язання. Загальний член ряду $u_n = \frac{n^2}{5^n}$. Запишемо $u_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{5^{n+1}}$ і розглянемо $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(n+1)^2}{5^{n+1}} : \frac{n^2}{5^n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{5n^2} = \frac{1}{5} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = \frac{1}{5} < 1$. За ознакою

Даламбера ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5^n}$ збіжний.

Приклад 2. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Розв'язання. Загальний член ряду $\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ почергово змінює знак, отже, ряд -

знакочергуючий. Обидві умови теореми Лейбніца для цього ряду виконуються:

$$1) \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}; \quad 2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Таким чином, ряд збіжний.

Приклад 3. Дослідити на абсолютну і умовну збіжність ряд

$$\frac{5}{2\sqrt{3}} - \frac{5}{3\sqrt{4}} + \frac{5}{4\sqrt{5}} - \frac{5}{5\sqrt{6}} + \dots$$

Розв'язання. Знайдемо загальний член цього ряду: $u_n = \frac{(-1)^{n+1} 5}{(n+1)\sqrt{n+2}}$.

Ряд знакочергуючий, перевіримо виконання умов ознаки Лейбніца:

$$1) \frac{5}{(n+1)\sqrt{n+2}} < \frac{5}{(n+2)\sqrt{n+3}};$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{(n+1)\sqrt{n+2}} = 0.$$

Ряд збіжний. Розглянемо ряд складений із абсолютних величин його членів:

$$\frac{5}{2\sqrt{3}} + \frac{5}{3\sqrt{4}} + \frac{5}{4\sqrt{5}} + \frac{5}{5\sqrt{6}} + \dots$$

Застосуємо для цього ряду інтегральну ознаку Коші. Розглянемо невласний інтеграл:

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{5}{(x+1)\sqrt{x+2}} dx &= \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_1^a \frac{5}{(x+1)\sqrt{x+2}} dx = \left. \begin{matrix} t^2 = x+2 \\ x = t^2 - 2 \\ dx = 2tdt \end{matrix} \right|_{t=1}^{t=\sqrt{a-1}} = 5 \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_1^{\sqrt{a-1}} \frac{2tdt}{t^2-1} = 10 \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_1^{\sqrt{a-1}} \frac{dt}{t-1} = \\ &= 10 \lim_{a \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| \Big|_{x=1}^{x=a} \right) = 5 \lim_{a \rightarrow +\infty} \left(\ln \left| \frac{\sqrt{a-1}-1}{\sqrt{a-1}+1} \right| - \ln \left| \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} \right| \right) = 5 \ln 1 - 5 \ln \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2} = -5 \ln \left(\sqrt{3} - \right. \end{aligned}$$

Невласний інтеграл збіжний, отже ряд буде збіжним абсолютно.

Приклад 4. Знайти інтервал збіжності ряду $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+\sqrt{n}}$.

Розв'язання. Знайдемо спочатку його радіус збіжності

За умовою $a_n = \frac{1}{n+\sqrt{n}}$ і $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)+\sqrt{n+1}}$.

$$\begin{aligned} R &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n+\sqrt{n}} \cdot \frac{(n+1)+\sqrt{n+1}}{1} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1+\sqrt{n+1}}{n+\sqrt{n}} \right| = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{n}{n} + \frac{1}{n} + \sqrt{\frac{n}{n^2} + \frac{1}{n^2}}}{\frac{n}{n} + \frac{\sqrt{n}}{n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1 + \frac{1}{n} + \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{n}}} \right| = 1 \end{aligned}$$

Звідси маємо, що ряд буде збіжним на інтервалі $(-1; 1)$; розбіжним за його межами.
Нехай $x = -1$, тоді маємо числовий ряд:

$$\frac{1}{1+\sqrt{1}} - \frac{1}{2+\sqrt{2}} + \dots + \frac{(-1)^n}{n+\sqrt{n}} + \dots$$

Цей ряд є знакочергуючим, тому використаємо ознаку Лейбніца.

Для цього ряду $u_n = \frac{1}{n+\sqrt{n}}$; $u_{n+1} = \frac{1}{n+1+\sqrt{n+1}}$.

Оскільки 1) $\frac{1}{n+\sqrt{n}} > \frac{1}{n+1+\sqrt{n+1}} \Rightarrow u_n > u_{n+1}$;

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+\sqrt{n}} = 0$, то ряд збіжний і точка $x = -1$ належить інтервалу збіжності.

Нехай $x = 1$, тоді маємо числовий ряд: $\frac{1}{1+\sqrt{1}} + \frac{1}{2+\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{n+\sqrt{n}}$.

Цей ряд є знакододатним числовим рядом. Який буде розбіжним, а отже точка $x = 1$ не належить інтервалу збіжності.

Тому степеневий ряд буде збіжним при $x \in [-1; 1)$.

Завдання для самостійної роботи

Завдання 1. Дослідити на збіжність ряд за ознакою Даламбера.

1) $\frac{1}{10} + \frac{1 \cdot 2}{10^2} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{10^3} + \dots$;

2) $\frac{1}{3} + \frac{4}{3^2} + \frac{7}{3^3} + \dots$;

3) $1 + \frac{3}{1} + \frac{9}{1 \cdot 2} + \frac{27}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$;

4) $\frac{2\sqrt{1}}{1} + \frac{3\sqrt{2}}{4} + \frac{4\sqrt{3}}{9} + \frac{5\sqrt{4}}{16} + \dots$;

5) $\frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{7!} + \dots$;

6) $\frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{9!} + \dots$;

7) $\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{3}{(\sqrt{3})^2} + \frac{5}{(\sqrt{3})^3} + \dots$;

8) $\frac{1}{2} + \frac{2}{6} + \frac{3}{24} + \frac{4}{120} + \dots$;

9) $\frac{1}{e} + \frac{8}{e^2} + \frac{27}{e^3} + \dots$;

10) $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{17} + \dots$;

11) $\frac{2}{5} + \frac{4}{25} + \frac{6}{125} + \dots$;

12) $\frac{3}{1} + \frac{3^2}{4} + \frac{3^3}{9} + \dots$;

13) $\frac{2}{1} + \frac{4}{4} + \frac{8}{9} + \frac{16}{16} + \dots$;

14) $\frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 2}{3^2} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3^3} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{3^4} + \dots$;

15) $\frac{1}{3 \cdot 2} + \frac{2}{3 \cdot 2^2} + \frac{3}{3 \cdot 2^3} + \frac{4}{3 \cdot 2^4} + \dots$;

16) $\frac{4}{4} + \frac{4^2}{16} + \frac{4^3}{36} + \dots$;

- 17) $\frac{3}{1 \cdot 2} + \frac{3^2}{2 \cdot 3} + \frac{3^3}{3 \cdot 4} + \dots$;
- 18) $\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 3^2} + \frac{1}{4 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^4} + \dots$;
- 19) $\frac{3}{3} + \frac{3^2}{3^2} + \frac{3^3}{3^3} + \dots$;
- 20) $\frac{1}{-} + \frac{8}{-} + \frac{27}{-} + \frac{64}{-} + \dots$;
- 21) $\frac{1 \cdot 2}{3} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3^2} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{3^3} + \dots$;
- 22) $\frac{2}{6} + \frac{4}{6^2} + \frac{8}{6^3} + \dots$;
- 23) $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots$;
- 24) $\frac{1}{4} + \frac{1 \cdot 2}{4^2} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{4^3} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{4^4} + \dots$;
- 25) $\frac{5}{1} + \frac{5^2}{32} + \frac{5^3}{243} + \dots$;
- 26) $1 + \frac{2}{1} + \frac{4}{1 \cdot 2} + \frac{8}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$;
- 27) $\frac{1^4}{4} + \frac{2^4}{16} + \frac{3^4}{64} + \dots$;
- 28) $\frac{2}{-} + \frac{4}{-} + \frac{8}{-} + \dots$;
- 29) $\frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{2}{4 \cdot 5^2} + \frac{3}{4 \cdot 5^3} + \frac{4}{4 \cdot 5^4} + \dots$;
- 30) $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3 \cdot 2} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{4 \cdot 2^2} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{5 \cdot 2^3} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{6 \cdot 2^4} + \dots$;

Завдання 2. Дослідити на абсолютну і умовну збіжність ряд:

- 1) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$;
- 2) $-\frac{1}{8} + \frac{2}{27} - \frac{3}{64} + \frac{4}{125} - \dots$;
- 3) $-1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{16} - \dots$;
- 4) $\frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots$;
- 5) $\frac{4}{1} - \frac{9\sqrt{2}}{4} + \frac{16\sqrt{3}}{9} - \frac{25\sqrt{4}}{16} + \dots$;
- 6) $\frac{1}{6} - \frac{2}{36} + \frac{6}{216} - \frac{24}{1296} + \dots$;
- 7) $\frac{\ln 5}{5} - \frac{\ln 7}{15} + \frac{\ln 9}{25} - \frac{\ln 11}{35} + \dots$;
- 8) $1 - \frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \frac{1}{\sqrt[3]{9}} - \frac{1}{\sqrt[3]{16}} + \dots$;
- 9) $\frac{1}{4\sqrt{2}} - \frac{2}{7\sqrt{3}} + \frac{3}{10\sqrt{4}} - \frac{4}{13\sqrt{5}} + \dots$;
- 10) $\frac{1}{2\sqrt{1}} - \frac{1}{4\sqrt{2}} + \frac{1}{8\sqrt{3}} - \frac{1}{16\sqrt{4}} + \dots$;
- 11) $\frac{1}{5\ln 2} - \frac{1}{7\ln 3} + \frac{1}{9\ln 4} - \frac{1}{11\ln 5} + \dots$;
- 12) $\frac{2}{7} - \frac{2}{8} + \frac{2}{9} - \frac{2}{10} + \dots$;
- 13) $\frac{1}{47} - \frac{3}{97} + \frac{5}{147} - \frac{7}{197} + \dots$;
- 14) $\frac{1}{103} - \frac{6}{203} + \frac{36}{303} - \frac{216}{403} + \dots$;
- 15) $-1 + \frac{4}{3} - \frac{16}{9} + \frac{64}{27} - \dots$;
- 16) $\frac{\sqrt{3}}{5} - \frac{\sqrt{7}}{9} + \frac{\sqrt{11}}{13} - \frac{\sqrt{15}}{17} + \dots$;

$$17) \frac{1}{2} - \frac{\sqrt[3]{9}}{4} + \frac{\sqrt[3]{25}}{6} - \frac{\sqrt[3]{49}}{8} + \dots;$$

$$19) \frac{1}{2} - \frac{8}{4} + \frac{27}{8} - \frac{64}{16} + \dots;$$

$$21) \frac{\sqrt{5}}{7} - \frac{\sqrt{7}}{13} + \frac{\sqrt{9}}{19} - \frac{\sqrt{11}}{25} + \dots;$$

$$23) -\frac{5}{4} + \frac{5}{7} - \frac{5}{10} + \frac{5}{13} - \dots;$$

$$25) \frac{25}{1} - \frac{25}{10} + \frac{25}{19} - \frac{25}{28} + \dots;$$

$$27) \frac{5}{2} - \frac{7}{8} + \frac{9}{14} - \frac{11}{20} + \dots;$$

$$29) \frac{26}{\sqrt{10}} - \frac{26}{\sqrt{16}} + \frac{26}{\sqrt{22}} - \frac{26}{\sqrt{28}} + \dots;$$

$$18) -\frac{51}{8} + \frac{53}{16} - \frac{55}{32} + \frac{57}{64} - \dots;$$

$$20) \frac{1}{101} - \frac{8}{201} + \frac{15}{301} - \frac{22}{401} + \dots;$$

$$22) 1 - \frac{1}{9} + \frac{1}{25} - \frac{1}{49} + \dots;$$

$$24) \frac{7}{1} - \frac{8}{4} + \frac{9}{7} - \frac{10}{10} + \dots;$$

$$26) \frac{3}{1} - \frac{10}{2} + \frac{17}{3} - \frac{24}{4} + \dots;$$

$$28) \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{10}}{10} + \frac{\sqrt{17}}{17} - \frac{\sqrt{24}}{24} + \dots;$$

$$30) \frac{5}{2\sqrt{3}} - \frac{5}{3\sqrt{4}} + \frac{5}{4\sqrt{5}} - \frac{5}{5\sqrt{6}} + \dots.$$

Завдання 3 Знайти інтервал збіжності ряду і дослідити його збіжність на кінцях інтервалу:

$$1) x + \frac{x^2}{20} + \frac{x^3}{300} + \frac{x^4}{40000} + \dots;$$

$$3) \frac{x}{2} + \frac{x^2}{5} + \frac{x^3}{8} + \frac{x^4}{11} + \dots;$$

$$5) \frac{x}{3} + \frac{x^2}{15} + \frac{x^3}{35} + \frac{x^4}{63} + \dots;$$

$$7) \frac{x}{3} + \frac{4x^3}{9} + \frac{9x^5}{27} + \frac{16x^7}{81} + \dots;$$

$$9) 1 + 2x^2 + 4x^4 + 8x^6 + \dots;$$

$$11) \frac{x}{1} - \frac{x^2}{\sqrt{2}} + \frac{x^3}{\sqrt{3}} - \frac{x^4}{\sqrt{4}} + \dots;$$

$$13) \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots;$$

$$15) \frac{x}{1} + \frac{x^2}{20} + \frac{x^3}{300} + \frac{x^4}{4000} + \dots;$$

$$2) -\frac{x}{2} + \frac{x^2}{2 \cdot 4} - \frac{x^3}{3 \cdot 8} + \frac{x^4}{4 \cdot 16} - \dots;$$

$$4) x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots;$$

$$6) \frac{x^2}{2} - \frac{2x^4}{4} + \frac{3x^6}{8} - \frac{4x^8}{16} + \dots;$$

$$8) \frac{4x}{3\sqrt[3]{2}} + \frac{16x^2}{9\sqrt[3]{6}} + \frac{64x^3}{27\sqrt[3]{10}} + \dots;$$

$$10) \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots;$$

$$12) \frac{3x}{1} + \frac{9x^2}{\sqrt{2}} + \frac{27x^3}{\sqrt{3}} + \dots;$$

$$14) 10x + 100x^2 + 1000x^3 + \dots;$$

$$16) \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots;$$

- 17) $\frac{x}{1 \cdot 2} + \frac{x^2}{2 \cdot 3} + \frac{x^3}{3 \cdot 4} + \frac{x^4}{4 \cdot 5} + \dots;$
- 18) $\frac{x}{1} + \frac{x^2 \sqrt{2}}{2} + \frac{x^3 \sqrt{3}}{6} + \frac{x^4 \sqrt{4}}{24} + \dots;$
- 19) $\frac{x}{1} - \frac{x^2}{3\sqrt{2}} + \frac{x^3}{9\sqrt{3}} - \frac{x^4}{27\sqrt{4}} + \dots;$
- 20) $1 + 2x + 6x^2 + 24x^3 + \dots;$
- 21) $\frac{8x}{\sqrt[3]{2}} + \frac{64x^2}{\sqrt[3]{7}} + \frac{512x^3}{\sqrt[3]{12}} + \dots;$
- 22) $\frac{3x}{5\sqrt[3]{2}} + \frac{9x^2}{25\sqrt[3]{3}} + \frac{27x^3}{125\sqrt[3]{4}} + \dots;$
- 23) $\frac{2x}{3 \cdot 3} + \frac{4x^2}{9 \cdot 4} + \frac{8x^3}{27 \cdot 5} + \dots;$
- 24) $\frac{3x}{1} + \frac{9x^2}{\sqrt{2}} + \frac{27x^3}{\sqrt{3}} + \dots;$
- 25) $\frac{7x}{4\sqrt[3]{2}} + \frac{49x^2}{16\sqrt[3]{4}} + \frac{343x^3}{64\sqrt[3]{6}} + \dots;$
- 26) $-2x^2 + 4x^4 - 8x^6 + \dots;$
- 27) $\frac{x}{1} + \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{27} + \frac{x^4}{64} + \dots;$
- 28) $\frac{8x}{\sqrt[3]{2}} + \frac{64x^2}{\sqrt[3]{7}} + \frac{512x^3}{\sqrt[3]{12}} + \dots;$
- 29) $\frac{\sqrt{2}x}{3} + \frac{\sqrt{4}x^2}{9} + \frac{\sqrt{8}x^3}{27} + \dots;$
- 30) $\frac{x}{1 \cdot 2} + \frac{x^2}{2 \cdot 2^2} + \frac{x^3}{3 \cdot 2^3} + \dots$

Розділ IV. Елементи теорії ймовірностей та основи математичної статистики

§1. Елементи теорії ймовірностей

Основні формули комбінаторіки

| Число | Порядок | Е л е м е н т и | |
|--------------|------------|-------------------------------|---|
| | | не повторюються | повторюються |
| Перестановок | важливий | $P_n = n!$ | $\tilde{P}_n = \frac{n!}{\underset{1}{n}! \cdot \underset{2}{n}! \cdot \dots \cdot \underset{k}{n}!}$ |
| Розміщень | | $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ | $\tilde{A}_n^k = n^k$ |
| Комбінацій | неважливий | $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ | $\tilde{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$ |

За означенням вважають, що $0! = 1$.

Приклад 1. Необхідно придбати п'ять вітальних листівок. На пошті є їх три різних види. Скількома способами це можна зробити?

Розв'язання. В цій задачі порядок слідування елементів неважливий. Оскільки листівки в одному наборі можуть повторюватися. Отже, маємо число комбінацій із повторенням елементів $\tilde{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$.

В нашому випадку $n = 3$ різних видів елементів (листівок) по $k = 5$ елементів(набори), за умови, що елементи можуть повторюватися. Отже, таких наборів існує

$$N = \binom{5}{3} = \binom{5}{3+5-1} = C_7 = \frac{7!}{5!(7-5)!} = \frac{6 \cdot 7}{1 \cdot 2} = 21.$$

Приклад 2. Скільки п'ятизначних чисел можна записати за допомогою цифр 0, 1 і 2?

Розв'язання. Порядок у цій задачі важливий і, очевидно, елементи (цифри) можуть повторюватися. Тому скористаємося формулою числа розміщень із повторенням $\tilde{A}_n^k = n^k$.

В нашому випадку $n = 3$ різних видів елементів (0, 1, 2) по $k = 5$ елементів (п'ятизначних чисел), за умови, що елементи можуть повторюватися. Отже, таких чисел існує

$$\tilde{A}_3^5 = 3^5 = 243.$$

Тепер підрахуємо всі числа, в яких на першому місці знаходиться цифра 0.

$$\text{Тоді остаточно маємо} \quad N = \frac{\tilde{A}_3^4}{A_3} = \frac{3^4}{3} = 81, \quad N = \tilde{A}_3^5 - \frac{\tilde{A}_3^4}{A_3} = 243 - 81 = 162.$$

Приклад 3. Кожна країна фентезі-материка має прапор, який складається із трьох горизонтальних смужок різного кольору, а саме: білого, блакитного, жовтого, зеленого, помаранчевого, синього, фіолетового, червоного, чорного. Скільки країн населяють цей суходіл?

Розв'язання. Порядок у цій задачі важливий і, очевидно, елементи не повторюються (про це сказано в умові задачі). Тому скористаємося формулою числа

$$\text{розміщень} \quad A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

В нашому випадку $n = 9$ елементів (кольори) по $k = 3$ (смужки), за умови, що елементи не повторюються. Отже, кількість країн дорівнює

$$A_9^3 = \frac{9!}{(9-3)!} = \frac{9!}{6!} = 7 \cdot 8 \cdot 9 = 504$$

Приклад 4. У партії з 15 деталей 12 стандартних. З цієї партії навмання взято 2 деталі. Яка ймовірність того, що хоч одна з цих двох деталей стандартна?

Розв'язання. Позначимо подію A : з двох вибраних деталей одна (точно одна) стандартна, а подію B : обидві вибрані деталі стандартні. Тоді подія $A + B$ - хоч одна з двох вибраних деталей стандартна. Події A і B , очевидно, несумісні, тому за теоремою 1 $P(A + B) = P(A) + P(B)$. Але

$$P(A) = \frac{C_{12}^1 \cdot C_3^1}{C_{15}^2} = \frac{12}{35},$$

$$P(B) = \frac{C_{12}^2}{C_{15}^2} = \frac{22}{35}$$

$$\text{Отже,} \quad P(A + B) = \frac{12}{35} + \frac{22}{35} = \frac{34}{35}.$$

Приклад 5. Кинуті два гральних кубики. Яка ймовірність того, що хоч на одному з них випаде трійка?

Розв'язання. Нехай подія A : на першому гральному кубіку випала трійка, подія B : на другому гральному кубіку випала трійка. Події A і B є сумісними. Тоді подія $A+B$: хоч на одному гральному кубіку випала трійка.

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB),$$

де подія AB : на обох гральних кубиках випала трійка.

Очевидно, $P(A) = P(B) = \frac{1}{6}$, $P(AB) = \frac{1}{36}$, тому

$$P(A + B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36}.$$

Приклад 5. В урні 16 кульок, з них 4 білі, а інші кольорові. Вийняли 3 кульки. Яка ймовірність того, що серед них є хоч одна кольорова?

Розв'язання. Нехай подія A : серед вийнятих кульок є хоч одна кольорова, тоді подія \bar{A} : всі три вийняті кульки білі. Неважко обчислити, що

$$P(\bar{A}) = \frac{C_4^3}{C_{16}^3} = \frac{1}{140}.$$

Тоді за наслідком 4 маємо

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{1}{140} = \frac{139}{140}.$$

Приклад 6. В урні 10 куль, з них 3 білих і 7 чорних. Навмання беруть по одній дві кулі. Яка ймовірність того, що обидві кулі білого кольору?

Розв'язання. Подія A - перша взята куля біла, подія B - друга взята куля біла, подія C - обидві кулі білі.

Ймовірність взяти першою білу кулю дорівнює $P(A) = \frac{3}{10}$. В урні залишилося 2 білих

кулі та 7 чорних, тому ймовірність взяти другу кулю білу дорівнює $P(B) = \frac{2}{9}$. Ймовірність того, що обидві кулі (перша і друга) білого кольору обчислюємо за теоремою 3

$$P(C) = P(AB) = P(A)P_A(B)$$

$$P(C) = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{1}{15}.$$

Приклад 7. Схожість насіння становить 95%. Відбирається 6 насінин. Яка ймовірність того, що зійде: а) 5 насінин; б) не менше 5 насінин.

Розв'язання. Оскільки кількість випробувань невелика, то застосуємо формулу Бернуллі

$$p_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

а) У нашому випадку $p = 0,95$, $n = 6$, $k = 5$. Тоді

$$P_6(5) = C_6^5 \cdot 0,95^5 \cdot 0,05 = \frac{6!}{5!(6-5)!} \cdot 0,95^5 \cdot 0,05 \approx 0,23.$$

Отже, ймовірність того, що зійде лише 5 насінин із шести посіяних дорівнює 0,23.

б) В другому випадку шукана ймовірність обчислюється так:

$$P_6(k \geq 5) = P_6(5) + P_6(6) = 0,23 + C_6^6 \cdot 0,95^6 \cdot 0,05^0 \approx 0,23 + 0,73 = 0,96.$$

Приклад 8. Ймовірність схожості насіння пшениці дорівнює 0,9. Знайти ймовірність того, що із 400 посіяних насінин проростуть 350 насінин. Скільки насінин найімовірніше зійде?

Розв'язання. Оскільки кількість випробувань велика, то скористаємося локальною теоремою Лапласа

$$P_n(K) = \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}, \text{ де } x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}.$$

У нашому випадку $p = 0,9$, $n = 400$, $k = 350$. Тоді маємо

$$x = \frac{350 - 400 \cdot 0,9}{\sqrt{36}} = -\frac{10}{6} \approx -1,67.$$

З таблиці значень функції $\varphi(x)$ знаходимо $\varphi(-1,67) = \varphi(1,67) = 0,0989$. Тоді

$$P_{400}(350) = \frac{1}{\sqrt{36}} \cdot 0,0989 \approx 0,01165$$

Число насінин k_0 , які *найбільш імовірно* зйдуть, визначимо з даної нерівності:

$$400 \cdot 0,9 - 0,1 \leq k_0 \leq 400 \cdot 0,9 + 0,9$$

$$359,9 \leq k_0 \leq 360,9$$

Отже, $k_0 = 360$ насінин.

Приклад 9. Схожість насіння становить 90 %. Знайти ймовірність того, що із 500 насінин дадуть сходи від 400 до 440 насінин.

Розв'язання. Скористаємося інтегральною формулою Лапласа

$$P(k_1 \leq k \leq k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \quad \text{де } x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}; \quad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

В нашому випадку

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{400 - 500 \cdot 0,9}{\sqrt{500 \cdot 0,9 \cdot 0,1}} \approx -7,45, \quad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{440 - 500 \cdot 0,9}{\sqrt{500 \cdot 0,9 \cdot 0,1}} \approx -1,49.$$

$$\text{Тоді } P_{500}(400 \leq k \leq 440) = \Phi(-1,49) - \Phi(-7,45) = -0,4319 + 0,5 = 0,0681.$$

Приклад 10. Завод відправив на базу 10000 доброякісних виробів. Імовірність того, що виріб у дорозі зіпсується, дорівнює 0,02%. Знайти ймовірність того, що в дорозі зіпсуються 4 вироби?

Розв'язання. Оскільки число випробувань $n=10000$ велике, а ймовірність появи події $p=0,0002$ ($0,02\%=0,0002$) дуже мала ($p < 0,1$), тобто $\lambda = np = 10000 \cdot 0,0002 = 2$ ($np < 10$), то в цьому випадку скористаємось формулою Пуассона.

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}, \text{ тобто } P_{10000}(4) = \frac{2^4}{4!} e^{-2} \approx 0,090224 \approx 9\%$$

Завдання для самостійної роботи

Завдання 1 Розв'язати задачі.

Варіант 1

1. В ящику лежать 8 білих і 12 червоних однакових на дотик кульок. Навмання виймають 3 кульки. Яка ймовірність того, що хоча б одна із них буде біла?
2. В секції баскетболістів тренуються 12 спортсменів. Скільки можна утворити різних стартових п'ятірок?
3. У господарстві 5 ділянок землі, які необхідно зайняти під 5 різних культур. Яка ймовірність того, що випадково закріплені за ділянками культури співпадатимуть із запланованими?

В а р і а н т 2

1. В ящику змішали 60 груш сорту Лісова красуня і 40 - сорту Бере Мліївська. Навмання відбирають 2 плоди. Знайти ймовірність настання наступних подій: а) обидві груші сорту Лісова красуня; б) обидві груші сорту Бере Мліївська; в) груші різних сортів.

2. Скількома способами можна скласти набір із 8 тістечок, якщо в магазині є 4 сорти тістечок?

3. В ящику лежать 20 однакових на дотик куль. З них 12 білих і 8 чорних. Навмання виймають одну кулю. Яка ймовірність того, що вона виявиться білою?

В а р і а н т 3

1. Схожість насіння, що попало в сприятливі умови, оцінюється ймовірністю 0.98. Імовірність попадання насіння в сприятливі умови дорівнює 0.96. Який відсоток насіння проросте?

2. Скільки п'ятицифрових чисел можна скласти із цифр 2, 3, 4, 5, 7 за умови, що в числі цифри не повторюються?

3. В партії з 18 виробів 5 бракованих. Навмання відбирають 3 вироби. Знайти ймовірність того, що серед відібраних виробів буде: а) 1 бракований; б) 2 бракованих; в) жодного бракованого.

В а р і а н т 4

1. У команді 10 спортсменів, 4 з яких - майстри спорту. Жеребкуванням з команди вибирають трьох спортсменів. Яка ймовірність того, що всі вибрані спортсмени - майстри спорту?

2. Група складається з 30 студентів. Скількома способами можна виділити сімох чоловік для чергування в ДНД, якщо: а) один з них має бути старшим; б) старшого не повинно бути?

3. По мішені зроблено 20 пострілів, з яких лише 18 виявилися влучними. Знайти відносну частоту влучень в мішень.

В а р і а н т 5

1. В ящику 8 білих і 12 червоних на дотик куль. Навмання виймають 6 куль. Яка ймовірність того, що серед них буде не більше однієї білої кульки?

2. Скільки парних п'ятизначних чисел можна утворити з цифр 0, 1, 2, 3, 4 так, щоб усі цифри числа були різними?

3. Замок відкривається лише при виборі п'ятизначного шифру, який складається з цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Яка ймовірність того, що замок буде відкрито при випадковому наборі шифру?

В а р і а н т 6

1. Скільки можна скласти тризначних чисел з цифр 1, 2, 3, 4, 5, якщо цифри можуть повторюватись?

2. На столі знаходяться змішані волокна бавовни, віскози і шерсті в пропорції 2

: 3 : 1. Яка ймовірність того, що випадково взята нитка виявиться: а) з бавовни; б) з віскози; в) з шерсті?

3. В ящику 7 білих і 9 чорних куль. Навмання виймають 1 кулю, розглядають і кладуть знову в ящик, а потім виймають ще одну. Яка ймовірність того, що обидві кулі будуть білими?

В а р і а н т 7

1. В урні 20 кульок: 5 червоних і 15 білих. Знайти ймовірність того, що навмання взяті 2 кульки будуть: а) одного кольору; б) різного кольору.

2. Скільки різних трицифрових чисел може скласти із карток з цифрами 1, 3, 5, 7, 9?

3. Знайти відносну частоту набування імунітету тваринами, якщо прививку зробили 12 тваринам, а імунітет набули лише 9.

В а р і а н т 8

1. В ящику 10 білих і 8 червоних кульок. Одночасно виймають навмання 2 кульки. Яка ймовірність того, що вони різного кольору?

2. У групі 30 студентів. Скількома способами можна обрати старосту і профорга групи за умови, що кожен студент може бути обраний на одну з цих посад?

3. В конверті серед 30 світлин знаходиться одна, яку необхідно просканувати на комп'ютері. З конверта випадково дістають 10 світлин. Знайти ймовірність того, що серед них буде потрібна.

В а р і а н т 9

1. На ділянці в посівах пшениці 95% здорових рослин. Вибирають 2 рослини. Знайти ймовірність того, що серед них хоч би одна виявиться здоровою.

2. Скільки існує двоцифрових чисел, що записуються цифрами 2, 4, 6, 8 без повторень цифр?

3. Із 30 стріл випущених спортсменом по мішені, лише 4 пролетіли мимо. Знайти відносну частоту влучень.

В а р і а н т 10

1. Деяка популяція рослин складається з особин трьох типів, які помічені AA, Aa, aa і чисельність їх відповідно дорівнює 200, 600 і 50 штук. Із популяції вибирають одну рослину. Знайти ймовірність того, що: а) вибрана рослина належить типу AA; б) вибрана рослина належить типу Aa або aa.

2. В науковому гуртку займаються 25 студентів. На організаційному занятті необхідно вибрати старосту гуртка, його заступника, редактора стінної газети і секретаря. Скількома способами можна це зробити?

3. Нехай в корзині є 25 картоплин, причому 5 з них мають механічні пошкодження, одержані при збиранні. Яка ймовірність того, що навмання взята картоплина буде: а) без пошкоджень; б) з пошкодженнями?

В а р і а н т 1 1

1. Під час збирання яблук брак складає в середньому 2 відсотки. Серед доброякісної продукції 95 відсотків вищого сорту. Яка ймовірність того, що навмання взяте яблуко виявиться вищого сорту, якщо його взяти: а) із продукції, яка пройшла сортування; б) із щойно зірваних яблук?
2. Скількома способами 5 різних комп'ютерів можна укомплектувати п'ятьма принтерами різних марок?
3. Абонент забув три останні цифри телефонного номера. Яка ймовірність вгадати цей номер?

В а р і а н т 1 2

1. В ящику лежать 8 білих і 12 червоних однакових на дотик куль. Навмання виймають 5 куль. Яка ймовірність того, що серед них буде не менше 2 білих куль?
2. Із вази, в якій знаходяться 6 персиків і 4 абрикоси, виймаються один за одним 5 плодів. Скількома способами можна це зробити: а) враховуючи порядок; б) не враховуючи порядок виймання плодів?
3. Знайти ймовірність того, що випадково взяте двозначне число складається: а) з однакових цифр; б) з різних цифр.

В а р і а н т 1 3

1. Скількома способами можуть четверо друзів замовити різне морозиво, якщо в кафе є 6 його сортів?
2. В урні є 5 білих, 3 чорні і 4 червоні кулі. Яка ймовірність того, що навмання вибрана куля виявиться білою?
3. В ящику змішали 60 груш сорту Лісова красуня і 40 - сорту Бере Мліївська. Навмання відбирають 2 плоди. Знайти ймовірність настання наступних подій: а) обидві груші сорту Лісова красуня; б) обидві груші сорту Бере Мліївська; в) груші різних сортів.

В а р і а н т 1 4

1. В ящику лежать 7 білих, 5 червоних і 8 синіх однакових куль. Виймається навмання одна куля. Яка ймовірність того, що вона не біла?
2. Студенти вашої підгрупи навмання вибирають автобуси для поїздки в Родниківку. Скількома способами вони можуть розміститися в трьох автобусах?
3. В магазині залишилось непроданими шість пар взуття 38 розміру. Яку партію взуття без 38 розміру слід замовити, щоб все взуття було розпродане, за умови, що відносна частота продажі взуття 38 розміру наближено дорівнює 0.04?

В а р і а н т 1 5

1. Три стрільці незалежно один від одного стріляють по мішені. Ймовірність влучення в ціль дорівнює 0.7 для першого стрільця, 0.8 - для другого і 0.9 - для третього. Яка ймовірність того, що: а) всі стрільці влучать в ціль; б) принаймні один з них влучить в ціль.

2. На черговому засіданні наукового гуртка заплановано заслухати 10 коротких повідомлень, причому три з них повинні робитися одне за одним в певній послідовності. Скількома способами можна скласти список доповідачів?

3. Відносна частота появи картоплин, які мають механічні пошкодження, дорівнює 0,15. В корзині є 350 картоплин. Скільки в корзині пошкоджених картоплин?

В а р і а н т 1 6

1. В лотереї випущено 10000 білетів і встановлено 10 виграшів по 200 грн., 100 - по 100 грн., 500 - по 25 грн. і 100 виграшів по 5 грн. Громадянин X купив один білет. Яка ймовірність того, що він виграє не менше 25 грн.?

2. Із 20 співробітників лабораторії 5 чоловік повинні виїхати в відрядження. Скільки може бути різних складів такої групи, якщо завідувач лабораторії і два провідних інженери одночасно виїхати не можуть?

3. Скільки раз рибалка закидав спінінг, якщо він зловив 14 щук, а відносна частота клювання в той день коливалась біля 0,22?

В а р і а н т 1 7

1. В першій урні є 3 білі і 7 чорних куль, у другій - 4 білі і 6 чорних. З кожної урни виймають по одній кулі. Яка ймовірність того, що обидві кулі білі?

2. Скількома способами можна виділити 5 студентів вашої групи для участі в демонстрації?

3. Набираючи номер телефона, абонент забув одну цифру і набрав її навмання. Знайти ймовірність того, що розмова відбулася.

В а р і а н т 1 8

1. В поштовому відділенні продаються листівки 10 видів. Скількома способами можна купити в ньому 12 листівок?

2. Відомо, що схожість насіння пшениці становить 90 відсотків. Скільки необхідно взяти зернин, щоб одержати 360 сходів?

3. Серед 60 ящиків з часником 3 ящики сорту Політ, а решта - з Ювілейним Грибовським. Знайти ймовірність того, що 2 взяті навмання ящики виявляться з часником сорту Політ.

В а р і а н т 1 9

1. Із підгрупи, яка складається з семи дівчат і чотирьох хлопців, необхідно вибрати 6 студентів так, щоб серед них було не менше двох хлопців. Скількома способами це можна зробити?

2. Із колоди карт (36 карт) навмання виймають три карти. Знайти ймовірність того, що серед них виявиться хоч би один туз.

3. В ящику 12 білих і 6 чорних кульок. Послідовно виймають 2 кулі. Яка ймовірність того, що вони обидві білі?

В а р і а н т 2 0

1. Студенти одного з курсів вивчають 8 навчальних дисциплін. Скількома

способами можна скласти розклад занять на понеділок, якщо в цей день слід запланувати три лекції з різних предметів?

2. Набираючи номер телефону, абонент забув три останні цифри і, пам'ятаючи лише, що ці цифри різні, набрав їх навмання. Знайти ймовірність того, що набрано потрібні цифри.

3. В урні є 30 куль: 10 червоних, 5 синіх і 15 непофарбованих. Знайти ймовірність того, що взята навмання куля буде кольоровою.

В а р і а н т 2 1

1. Скількома способами можна виготовити прапор, в якому 2 горизонтальні полоси різних кольорів, якщо є матеріал 5 різних кольорів?

2. Слово "інтеграл" складено з букв розрізаної азбуки. Навмання виймають три картки і кладуть в ряд в порядку їх витягування. Яка ймовірність дістати слово "гра"?

3. Із колоди в 32 карти навмання одну за одною виймають дві карти. Знайти ймовірність того, що буде вийнято: а) два валети; б) дві карти пікової масті; в) валет і бубнова дама.

В а р і а н т 2 2

1. Скільки різних "слів" можна утворити із слова "інститут"?

2. Вчений агроном зафіксував результати польового досліду з 10 ділянок, але забув вказати їх номери. Через деякий час його однокурсник роздрукував ці дані, вказавши навмання номери ділянок. Знайти ймовірність того, що при цьому будуть поставлені правильно номери всіх ділянок.

3. В урні знаходяться 3 білі і 7 чорних куль. Із урни виймають одну за одною дві кулі. Обчислити ймовірність того, що обидві кулі білі.

В а р і а н т 2 3

1. Із загону в 50 чоловік, серед яких є рядовий Макар, назначають в караул 4 чоловіки. Скількома способами можна це зробити? В скількох випадках в караул попаде і рядовий Макар?

2. Схожість насіння дикої яблуні дорівнює 60%. Скільки необхідно посіяти насінин, щоб одержати 120 рослин?

3. В ящику є 4 голубих, 5 червоних, 8 зелених і 3 непофарбованих кульок. Кулі перемішують і навмання виймають одну. Яка ймовірність того, що ця куля буде кольоровою?

В а р і а н т 2 4

Скількома способами можуть бути присуджені перша, друга і третя премії трьом переможцям студентської наукової конференції, в якій взяло участь 10 студентів?

1. Для визначення схожості пшениці висіяли дві серії по 200 зернин. Одержали відповідно 189 і 193 сходів. Яка відносна частота схожості в кожній серії? Чому дорівнює середня схожість пшениці?

2. В одній урні 3 білих і 7 чорних куль, у другій - 4 білі і 6 чорних. З кожної урни

виймають по одній кулі. Знайти ймовірність того, що кулі будуть різного кольору.

В а р і а н т 2 5

1. Скільки різних стартових шестірок можна утворити із 10 волейболістів?
2. Кожна із букв е, з, л, м, н, я написана на одній із 5 карток. Картки перемішують і розкладають в ряд. Знайти ймовірність того, що при цьому утвориться слово "земля".
3. В ящику лежить 8 білих і 12 червоних однакових на дотик куль. Навмання виймають 2 кулі. Яка ймовірність того, що вони одного кольору?

В а р і а н т 2 6

1. До каси інституту одночасно підійшли 8 чоловік. Скількома способами вони можуть стати в чергу?
2. Контролю підлягають 250 деталей, серед яких є 5 нестандартних. Яка ймовірність того, що навмання взята для контролю деталь виявиться: а) нестандартною; б) стандартною?
3. В першій урні є урні є 2 білі і 6 чорних куль, у другій - по 4 білих і чорних. З першої урни виймають одну кулю, а з другої - дві. Яка ймовірність того, що всі кулі виявляться одного кольору?

В а р і а н т 2 7

1. Скільки різних п'ятизначних чисел можна записати із цифр 1, 2, 3, 4, 5 без повторення цифр?
2. Четверо гостей дощового вечора в темноті навмання беруть парасольки. Яка ймовірність того, що вони візьмуть свої предмети?
3. В святковій лотереї 20 виграшних білетів. Яка ймовірність того, що з двох придбаних білетів лише один виявиться виграшним, якщо всього 100 білетів?

В а р і а н т 2 8

1. В класі є 30 учнів. Необхідно вибрати старосту, фізорга і культорга класу. Скількома способами можна це зробити?
2. В магазині залишилось непроданими 7 пар взуття 42 розміру. Яку партію взуття без 42 розміру слід замовити, щоб все взуття було розпродане, за умови, що відносна частота продажі 42 розміру складає 5.7%?
3. При обстеженні посівів озимої пшениці виявлено 40% рослин, уражених вірусом смугастої мозаїки. Знайти ймовірність того, що серед трьох рослин не виявиться жодної ураженої.

В а р і а н т 2 9

1. Шість однакових предметів необхідно розмістити в трьох ящиках. Скількома способами можна це зробити, якщо кожний ящик може вмістити всі 6 предметів?
2. Відносна частота пошкоджених дротяниками картоплин становить 45 відсотків. Для дослідів навмання відбирають 500 бульб. Скільки виявиться серед них пошкоджених картоплин?
3. В двох засіках зерносховища знаходиться посівний матеріал (пшениця).

Насіння з першого засіку має схожість 80%, з другого - 85%. Відбирається по одній зернині з кожного засіку. Знайти ймовірність наступних подій: А - "обидві зернини проростуть"; В - "лише одна зернина дасть сходи"; С - "обидві зернини не зійдуть".
Перевірити рівність $p(A) + p(B) + p(C) = 1$.

Варіант 30

1. Два пошталйони повинні доставити 10 листів за 10 адресами. Скількома способами вони можуть розподілити роботу?

2. Відділ технічного контролю при перевірці партії із 400 деталей встановив, що відносна частота бракованих деталей складає 1.2%. Скільки бракованих деталей виявлено в цій партії?

3. Для проведення аналізів відібрали 30 горішків фундуку: сорту Шедевр і решту - сорту Ганджа. Знайти ймовірність того, що 3 взяті навмання горішки виявляться: а) одного сорту; б) сорту Шедевр; в) різних сортів.

Завдання 2 Розв'язати задачі.

Варіант 1

1. Імовірність ураження рослин пшениці вірусом смугастої мозаїки дорівнює 0,4. Знайти ймовірність наступних подій: а) із чотирьох рослин уражені хворобою виявляться лише дві; б) із 2400 рослин ураженими будуть 1000; в) із 2400 ураженими будуть від 900 до 1000 рослин.

2. Нехай імовірність того, що пасажир запізниться до відправлення поїзда, дорівнює 0,02. знайти ймовірне число пасажирів, що запізниться, якщо продано 855 квитків.

3. Садовод влітку зробив 6 черенкувань. Із досвіду минулих років відомо, що після зимівлі приживляються лише 7 черенків з кожних 10. Знайти найбільш імовірне число черенків, що прижилися, та обчислити їх імовірність.

Варіант 2.

1. На дослідній ділянці посіяли 1500 квасолин сорту Запашна. Знайти: а) ймовірність того, що сходи дадуть рівно 1200 квасолин, якщо схожість цього сорту дорівнює 90%; б) не менше 1200 і не більше 1400.

2. Засміченість насіння становить 0,1 %. Яка ймовірність того, що серед навмання взятих 2000 зернин виявиться рівно 5 насінин бур'яну.

3. Молода студентська сім'я планує мати 8 дітей. Імовірність народження хлопчика дорівнює 0,52. Знайти ймовірність того, що народиться хлопчиків рівно 4. Знайти найімовірніше число хлопчиків цієї сім'ї.

Варіант 3.

1. Імовірність вживання бактерії після радіоактивного опромінення дорівнює 0,005. Знайти ймовірність того, що із 200 бактерій виживуть дві бактерій.

2. Схожість насіння пшениці становить 80%. Яка ймовірність того, що з 700 зернин дадуть сходи: а) рівно 575 зернин; б) від 550 до 580 зернин.

3. Імовірність того, що навмання вибране дерево в саду є слива сорту Ганна Шпет дорівнює 0,65. Знайти найімовірніше число дерев цього сорту, якщо в саду всього 217 дерев. Чому дорівнює ймовірність того, що в саду росте найімовірніше число слив сорту Ганна Шпет?

Варіант 4.

1. Імовірність того, що серед посівного матеріалу кукурудзи трапиться дефектна зернина, становить 0,005. Чому дорівнює ймовірність того, що серед 10000 навмання взятих зернин дефектних виявиться рівно 40.

2. Схожість насіння ячменю дорівнює 0,8. Знайти ймовірність наступних подій: а) з чотирьох насінин зійде три; б) із 100 насінин зійде 85; в) із 100 насінин зійде від 70 до 90 насінин.

3. Перевіряються на надійність 15 деталей, причому ймовірність, що деталь пройде перевірку дорівнює 0,9. Знайти найімовірніше число деталей, які пройдуть перевірку.

Варіант 5.

1. Імовірність попадання в ціль при одному пострілі дорівнює 0,4. Знайти: а) ймовірність 100 попадань із 320 пострілів; б) із 150 попадань не менше 130; в) із 6 попадань 3.

2. Прилад складається з 100 елементів, які працюють незалежно один від одного. Ймовірність виходу з ладу будь-якого елемента за час T дорівнює 0,002. Знайти ймовірність того, що за час T вийдуть з ладу рівно 3.

3. Ймовірність, що посіяне зерно пшениці проросте в середньому дорівнює 0,9. Було посіяно 700 зернин пшениці. Визначити найімовірніше число зернин, що проростуть та обчислити ймовірність цього числа.

Варіант 6.

1. Проводиться серія з 1000 випробувань, у кожному з яких подія A з'являється з ймовірністю 0,001. Знайти ймовірність того, що в цій серії випробувань подія A з'явиться тричі.

2. Схожість насіння квасолі становить 85%. Знайти ймовірність того, що із 200 посаджених квасолин зійдуть: а) 180; б) не менше 150.

3. Садовод влітку зробив 10 черенкувань сливи Ода. Із досвіду минулих років відомо, що після зимівлі приживляються лише 11 черенків з кожних 15. Знайти найбільш імовірне число черенків, що прижилися, та обчислити їх ймовірність.

Варіант 7.

1. Імовірність влучення в літак з гвинтівки дорівнює 0,001. Знайти ймовірність двох попадань, якщо зроблено 5000 пострілів.

2. Схожість насіння кабачків становить 87%. Знайти ймовірність того, що із 300 посаджених насінин зійдуть: а) 250 насінин; б) не менше 250 насінин.

3. Молода сім'я планує мати 5 дітей. Імовірність народження хлопчика дорівнює

0,52. Знайти ймовірність того, що народиться хлопчиків рівно 4. Знайти найімовірніше число хлопчиків цієї сім'ї, та обчислити їх ймовірність.

Варіант 8.

1. Ймовірність появи події в кожному з 100 незалежних випробувань є величина стала і дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що подія з'явиться: а) не менше 75 раз і не більше 90 раз; б) 75 разів; в) 38 разів рівно 5.

2. Фермер відправляє на ринок 500 ящиків з бананами. Ймовірність того, що продукція пошкодиться під час транспортування дорівнює 0,002. Знайти ймовірність того, що в дорозі зіпсуються 3 ящики.

3. Перевіряються на надійність 20 радіоламп, причому ймовірність, що радіолампа пройде перевірку дорівнює 0,8. Знайти найімовірніше число радіоламп, які пройдуть перевірку та обчислити їх ймовірність.

Варіант 9.

1. Підприємство "Дебет" 70% корнішонів випускає відмінної якості. Знайти ймовірність того, що: а) із п'яти випадкових банок чотири виявляться вищої якості; б) із 210 банок 140 відмінної якості; в) із 210 банок від 120 до 150 відмінної якості.

2. Ймовірність того, що навмання вибране дерево в саду є слива сорту Ганна Шпет дорівнює 0,65. Знайти найімовірніше число дерев цього сорту, якщо в саду всього 217 дерев. Чому дорівнює ймовірність того, що в саду росте найімовірніше число слив сорту Ганна Шпет?

3. Тираж посібника з вищої математики становить 5000. Ймовірність допустити брак для кожної книги дорівнює 0,001. Знайти ймовірність того, що серед випущених книг бракованих виявиться лише дві.

Варіант 10.

1. Молода студентська сім'я планує мати 8 дітей. Ймовірність народження хлопчика дорівнює 0,52. Знайти ймовірність того, що народиться хлопчиків рівно 4. Знайти найімовірніше число хлопчиків цієї сім'ї.

2. Забрудненість посівного матеріалу насінням бур'янового компоненту складає 0,1%. Знайти ймовірність того, що серед 2000 взятих навмання насінин виявиться троє зерен бур'янів.

3. Відомо, що на складі 70% груш сорту Бера Боскоп. На автомашину вантажать 200 ящиків. Чому дорівнює ймовірність того, що серед них виявиться груш: а) від 120 до 150 ящиків; б) від 90 до 150 ящиків?

Варіант 11.

1. Частка плодів, уражених хлорозом, складає 20%. Знайти для 100 випадково відібраних плодів: а) ймовірність ураження 20 плодів; б) ймовірність того, що уражених плодів виявиться від 10 до 30 штук.

2. Магазин замовив 2000 банок томатної пасти. Ймовірність того, що під час транспортування банка розіб'ється, дорівнює 0,002. Знайти ймовірність того, що

розіб'ється лише 3 банки.

3. Відомо, що на складі 70% груш сорту Бера Боскоп. На автомашину вантажать 200 ящиків. Чому дорівнює ймовірність того, що серед них виявиться груш: а) від 120 до 150 ящиків; б) від 90 до 150 ящиків?

Варіант 12.

1. Ймовірність появи події в кожному з 2100 незалежних випробувань дорівнює 0,7. Знайти ймовірність того, що подія появиться: а) не менше 1470 і не більше 1500 раз; б) не більше 1469 раз.

2. Тираж книги становить 50000. Ймовірність допустити брак для кожної книги дорівнює 0,0001. Знайти ймовірність того, що серед випущених книг бракованих виявиться лише дві. Знайти найімовірніше число бракованих книг.

3. Ймовірність виграшу на один лотерейний білет дорівнює 0,1. Знайти ймовірність того, що випаде лише два виграші на шість білетів.

Варіант 13.

1. Ймовірність успішного знищення личинок хрущів для кожного з 120 міжрядь саду дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що боротьба з личинками виявиться успішною а) для 100 міжрядь; б) не менше 105.

2. Середнє число рослин бур'яну, що знаходяться на 1 м², дорівнює 0,5. Знайти ймовірність того, що на ділянці площею 10 м² виявиться рівно 4 бур'яни.

3. Підручник виданий тиражем 10 тис. екземплярів. Ймовірність того, що книга неправильно зброшована, дорівнює 0,0001. Знайти ймовірність того, що тираж має рівно 5 бракованих книг. Знайти найімовірніше число бракованих книг.

Варіант 14.

1. Магазин замовив 1000 пляшок мінеральної води. Ймовірність того, що під час транспортування пляшка розіб'ється, дорівнює 0,003. Знайти ймовірність того, що розіб'ється лише 2 пляшки.

2. При проведенні досліду висіяно 900 зерен кукурудзи, схожість насіння якої становить 90%. Знайти ймовірність того, що: а) з трьох випадково відібраних насінин проростуть дві; б) із 900 насінин зійдуть 800; в) із 900 насінин зійдуть від 800 до 850.

3. Ймовірність того, що навмання вибране дерево в саду є яблуня сорту Флоріна дорівнює 0,65. Знайти найімовірніше число дерев цього сорту, якщо в саду всього 217 дерев. Чому дорівнює ймовірність того, що в саду росте найімовірніше число яблунь сорту Флоріна?

Варіант 15.

1. Ймовірність повного одужання від деякої хвороби дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що: а) із 4 хворих вилікуються троє; б) із 100 вилікуються 90; в) із 100 вилікуються від 70 до 90.

2. Ймовірність аварії на деякій ділянці дорівнює 0,002. Знайти ймовірність того, що в п'ятисот випадках на цій ділянці трапиться три аварії.

3 . Ймовірність, що посіяне зерно ячменю проросте в середньому дорівнює 0,8. Було посіяно 120 зернин ячменю. Визначити найімовірніше число зернин, що проростуть та обчислити ймовірність цього числа.

Варіант 16.

1. Садовод влітку зробив 18 черенкувань яблуні сорту Гала. Із досвіду минулих років відомо, що після зимівлі приживляються лише 8 черенків з кожних 11. Знайти найбільш імовірне число черенків, що прижилися, та обчислити їх імовірність.

2. Відомо, що в холодильнику 60% яблук першого сорту. На автомашину вантажать 200 ящиків. Чому дорівнює ймовірність того, що серед них виявиться з плодами першого сорту: а) від 120 до 150 ящиків; б) від 90 до 150 ящиків?

3. Забрудненість посівного матеріалу насінням бур'янового компоненту складає 0,0002 Знайти ймовірність того, що серед 10000 взятих навмання насінин виявиться шість зерен бур'янів.

Варіант 17.

1. При перевірці радіоламп встановлено, що 96% з них успішно працюють протягом гарантійного строку. Навмання вибирають 15000 радіоламп. Знайти ймовірність того, що з строком роботи менше гарантійного виявиться: а) від 600 до 660 ламп; б) від 570 до 630 ламп.

2. Молода студентська сім'я планує мати 7 дітей. Імовірність народження хлопчика дорівнює 0,51. Знайти ймовірність того, що народиться дівчаток рівно 5. Знайти найімовірніше число дівчаток цієї сім'ї.

3. Імовірність виживання маслянокислих бактерії після радіоактивного опромінення дорівнює 0,001. Знайти ймовірність, що із 2000 бактерій виживуть 3 бактерії.

Варіант 18.

1. Імовірність народження хлопчика дорівнює 0,515. Знайти ймовірність того, що з 200 новонароджених: а) буде 95 дівчаток; б) не менше 100 хлопчиків.

2. Імовірність виготовити нестандартну тракторну деталь дорівнює 0,003. Знайти ймовірність того, що серед 1000 деталей виявиться 4 нестандартні.

3 . Ймовірність, що посіяне насіння бобів проросте, в середньому дорівнює 0,9. Було посіяно 9 насінин. Визначити найімовірніше число насінин, що проростуть та обчислити ймовірність цього числа.

Варіант 19.

1. Імовірність того, що деталь не пройшла перевірку ВТК, дорівнює 0,2. Знайти ймовірність того, що серед 400 випадково відібраних деталей не пройдуть перевірку : а) від 70 до 100: б) рівно 50.

2. Підручник виданий тиражем 100 тис. екземплярів. Імовірність того, що книга неправильно зброшована, дорівнює 0,0001. Знайти ймовірність того, що тираж має рівно 5 бракованих книг.

3. Імовірність того, що навмання вибране дерево в саду на дачі є слива сорту Волошка дорівнює 0,35. Знайти найімовірніше число дерев цього сорту, якщо в саду всього 10 дерев. Чому дорівнює ймовірність того, що в саду росте найімовірніше число слив сорту Волошка?

Варіант 20.

1. Імовірність появи події в кожному з 120 незалежних експериментів дорівнює 0,2. Знайти ймовірність того, що подія настане: а) 30 раз; б) не менше 20 і не більше 30 раз.

2. Станок-автомат закриває банки з консервацією. Ймовірність того, що банка буде закрита нещільно, дорівнює 0.001. Знайти ймовірність того, що серед 2000 закритих банок виявиться рівно 3 бракованих. Знайти найімовірніше число бракованих банок.

3. Молода студентська сім'я планує мати 3 дітей. Імовірність народження хлопчика дорівнює 0,52. Знайти ймовірність того, що народиться хлопчиків рівно 2.

Варіант 21.

1. Лічильник Гейгера з імовірністю 0.0001 реєструє частини, які вилітають з радіоактивного джерела. За час спостережень з джерела вилетіло 30 тис. частинок. Яка ймовірність того, що лічильник зареєстрував 3 частинки.

2. Схожість насіння становить 95 %. Відбирається 6 насінин. Яка ймовірність того, що зійде 5 насінин. Знайти найімовірніше число насінин, що зійде.

3. Станок-автомат закриває пляшки з лимонадом. Ймовірність того, що пляшка буде закрита нещільно, дорівнює 0.001. Знайти ймовірність того, що серед 2000 закритих пляшок виявиться рівно 4 бракованих.

Варіант 22.

1. Імовірність виживання бактерії після радіоактивного опромінення дорівнює 0,005. Знайти ймовірність, що із 200 бактерій виживуть 4 бактерії.

2. Приймаючи, що ймовірності народження хлопчика і дівчинки однакові, знайти ймовірність того, що: а) із 4500 новонароджених буде 2300 хлопчиків; б) із 4000 новонароджених хлопчиків буде від 1950 до 2050; в) із 8 новонароджених дівчат буде 5.

3. Ймовірність, що посіяне насіння бобів проросте, в середньому дорівнює 0,8. Було посіяно 8 насінин. Визначити найімовірніше число насінин, що проростуть та обчислити ймовірність цього числа.

Варіант 23.

1. Імовірність появи шкідників на кущах агрусу дорівнює 0,9. Знайти ймовірність того, що: а) на двох кущах із 4 появилися шкідники; б) на 80 кущах із 100 появилися шкідники; в) не менше, ніж на 80 кущах із 100 появилися шкідники.

2. Станок-автомат закриває банки з консервацією. Ймовірність того, що банка буде закрита нещільно, дорівнює 0.01. Знайти ймовірність того, що серед 200 закритих банок виявиться рівно 4 бракованих.

3. Садовод влітку зробив 9 черенкувань сливи Ода. Із досвіду минулих років відомо, що після зимівлі приживляються лише 7 черенків з кожних 10. Знайти найбільш

імовірне число чернеків, що прижилися, та обчислити їх імовірність.

Варіант 24.

1. Нехай імовірність порушення герметичності металевої банки консервів дорівнює 0,0005. Знайти ймовірність того, що серед 2000 банок зіпсованими виявляться лише 2.

2. Імовірність ураження помідорів фітофторозом дорівнює 0,35. Знайти ймовірність того, що із 500 рослин ураженими будуть: а) 160; б) від 150 до 185 рослин.

3. Імовірність того, що навмання вибране дерево в саду є слива сорту Волошка дорівнює 0,35. Знайти найімовірніше число дерев цього сорту, якщо в саду всього 11 дерев. Чому дорівнює ймовірність того, що в саду росте найімовірніше число слив даного сорту?

Варіант 25.

1. Імовірність виходу з ладу кожного із 100 блоків електронного пристрою дорівнює 0,02. Знайти ймовірність того, що вийдуть з ладу три блоки.

2. Схожість насіння яблуні становить 90%. Знайти ймовірність того, що: а) із 800 посіяних насінин зійде не менше 700; б) із 500 посіяних насінин зійде рівно 450; в) із 7 насінин зійде 4.

3. Імовірність, що посіяне насіння огірків проросте, в середньому дорівнює 0,9. Було посіяно 200 насінин. Визначити найімовірніше число насінин, що проростуть та обчислити ймовірність цього числа.

Варіант 26.

1. Станок-автомат 80 відсотків продукції виготовляє вищого гатунку. Знайти ймовірність того, що: а) серед трьох виробів два вищого сорту; б) із 900 виробів 750 вищого сорту; в) із 900 виробів не менше 750 вищого сорту.

2. Завод відправив на базу призначення 5000 моторів. Імовірність того, що мотор буде пошкоджено, дорівнює 0,0002. Знайти ймовірність того, що на базу прибуде 3 непридатних для використання мотори.

3. Імовірність, що посіяне зерно пшениці проросте в середньому дорівнює 0,85. Було посіяно 1200 зернин пшениці. Визначити найімовірніше число зернин, що проростуть та обчислити ймовірність цього числа.

Варіант 27.

1. Імовірність влучення в мішень для кожного пострілу зенітної установки дорівнює 0,87. Знайти ймовірність того, що в серії із 60 пострілів влучень буде: а) не менше 45 і не більше 55; б) не менше 50.

2. Магазин замовив 1000 банок маринованих огірків. Імовірність того, що під час транспортування банка розіб'ється, дорівнює 0,005. Знайти ймовірність того, що розіб'ється лише 3 банки.

3. Молода студентська сім'я планує мати 3 дітей. Імовірність народження хлопчика дорівнює 0,48. Знайти ймовірність того, що народиться двоє хлопчиків. Знайти найімовірніше число хлопчиків цієї сім'ї.

Варіант 28.

1. Імовірність успішного знищення популяції шкідливого виду для кожної з 28 ділянок саду дорівнює 0,7. Знайти ймовірність того, що: а) на 20 ділянках захисні заходи виявляться успішними; б) не менше на 20 ділянках захисні заходи виявляться успішними.

2. Схожість насіння становить 95 %. Відбирається 8 насінин. Яка ймовірність того зійдуть 5 насінин. Знайти найімовірніше число насінин, що проростуть та обчислити ймовірність цього числа.

3. Тираж книги становить 10000. Імовірність допустити брак для кожної книги дорівнює 0,0002. Знайти ймовірність того, що серед випущених книг бракованих виявиться лише дві.

Варіант 29.

1. Засміченість насіння становить 0,2 %. Яка ймовірність того, що серед навмання взятих 2000 зернин виявиться рівно 4 насінин бур'яну.

2. Ймовірність, що посіяне насіння бобів проросте, в середньому дорівнює 0,78. Було посіяно 150 насінин. Визначити найімовірніше число насінин, що проростуть та обчислити ймовірність цього числа.

3. Імовірність виграшу на один лотерейний білет дорівнює 0,1. Знайти ймовірність того, що випаде: а) лише один виграш на три білети; б) від 8 до 12 виграшів на 100 білетів; в) 10 білетів з 90.

Варіант 30.

1. Схожість насіння цибулі становить 83%. Знайти ймовірність того, що із 300 насінин зійдуть: а) від 230 до 260 насінин; б) не менше 240 насінин; в) з 7 насінин 4.

2. Перевіряються на надійність 15 деталей, причому ймовірність, що деталь пройде перевірку дорівнює 0,9. Знайти найімовірніше число деталей, які пройдуть перевірку.

3. Станок-автомат закриває пляшки з лимонадом. Ймовірність того, що пляшка буде закрита нещільно, дорівнює 0.001. Знайти ймовірність того, що серед 2000 закритих пляшок виявиться рівно 4 бракованих.

§ 2. Основи математичної статистики

Приклад 1. За даними опитування сімей щодо планування кількості дітей:

1 2 4 3 2 3 4 2 4 5 1 2 3 4 2 3 5 3 4

необхідно: а) написати статистичний закон розподілу; б) знайти моду і медіану; в) побудувати полігон відносних частот.

Розв'язання.

а) Напишемо статистичний закон розподілу:

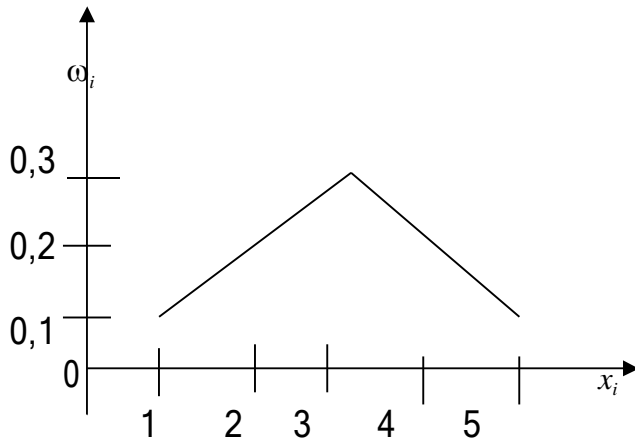
| | | | | | |
|------------|------|------|------|------|------|
| X_i | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| n_i | 2 | 5 | 6 | 5 | 2 |
| ω_i | 0,10 | 0,25 | 0,30 | 0,25 | 0,10 |

б) $Mo = 3$.

Кількість варіант парна, то тоді медіану визначаємо по формулі:

$$Me = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}; \quad Me = 3.$$

в) Побудуємо полігон відносних частот:



Приклад 2. За результатами вибіркового обстеження довжини стержнів колосків м'якої ярої пшениці (см):

5 8 7 8 10 8 8 5 12 8 10 7 9 8 4 7
 8 6 8 2 12 8 9 11 7 7 2 8 13 7 9 8
 8 8 6 3 12 4 14 7 8 7 7 6 13 4 8 8

Скласти інтервальний ряд розподілу довжини стержнів та побудувати гістограму відносних частот.

Розв'язання. Складемо інтервальний ряд розподілу.

Кількість інтервалів визначимо за формулою

$$K \approx \sqrt{n}, \quad K \approx \sqrt{48} \approx 7.$$

Довжина кожного інтервала:

$$h = \frac{R}{K}, \quad h = \frac{R}{K} \approx \frac{14 - 2}{7} \approx 2.$$

Відносні частоти обчислимо за формулою

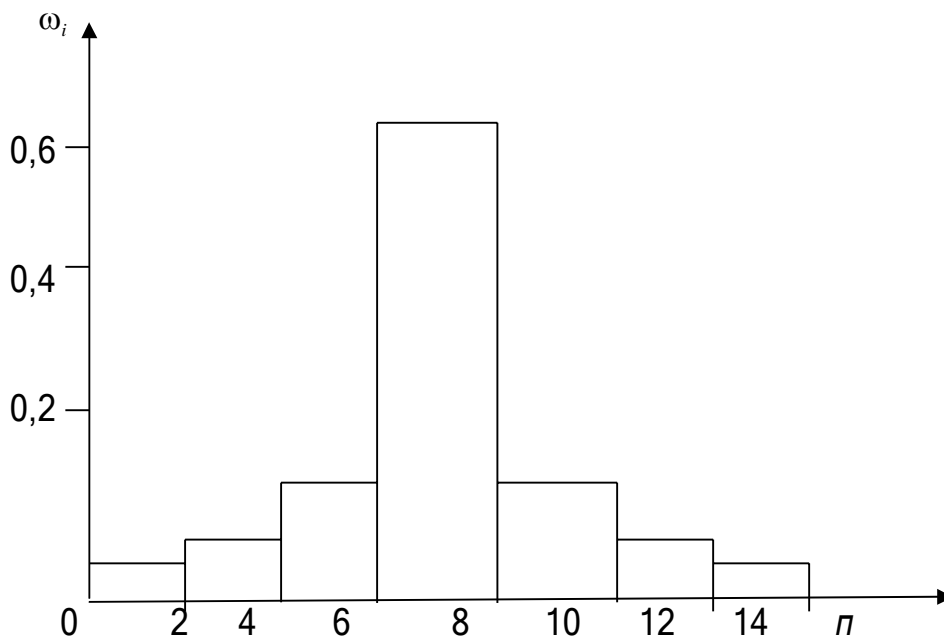
$$w_i = \frac{n_i}{n}; \quad w_1 = \frac{2}{48} \approx 0,04; \quad w_2 = \frac{4}{48} \approx 0,08; \quad w_3 = \frac{5}{48} \approx 0,1; \quad w_4 = \frac{25}{48} \approx 0,61$$

$$w_5 = \frac{5}{48} \approx 0,1; \quad w_6 = \frac{4}{48} \approx 0,08; \quad w_7 = \frac{3}{48} \approx 0,04.$$

Запишемо інтервальний ряд розподілу.

| Інтервал | 1 - 2 | 3 - 4 | 5 - 6 | 7 - 8 | 9 - 10 | 11 - 12 | 13 - 14 |
|------------|-------|-------|-------|-------|--------|---------|---------|
| n_i | 2 | 4 | 5 | 25 | 5 | 4 | 3 |
| ω_i | 0,04 | 0,08 | 0,1 | 0,61 | 0,1 | 0,08 | 0,04 |

За даними таблиці побудуємо гістограму відносних частот.



Приклад 3. За даними двох випадкових величин x і y

| | | | | | |
|-------|---|---|---|---|---|
| № | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| x_i | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| y_i | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 |

необхідно: а) побудувати кореляційне поле; б) знайти коефіцієнт кореляції; в) рівняння прямої лінії регресії y на x ; г) показати на кореляційному полі графік одержаного рівняння.

Розв'язання. Наведені дані занесемо у таблицю:

| № | x_i | y_i | x_i^2 | y_i^2 | $x_i y_i$ |
|---------|--|--|---|--|--|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 1 | 4 | 1 | 2 |
| 3 | 3 | 2 | 9 | 4 | 6 |
| 4 | 4 | 3 | 16 | 9 | 12 |
| 5 | 5 | 3 | 25 | 9 | 15 |
| суми | $\sum x_i = 15$ | $\sum y_i = 10$ | $\sum x_i^2 = 55$ | $\sum y_i^2 = 24$ | $\sum x_i y_i = 36$ |
| Середні | $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = 3$ | $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = 2$ | $\bar{x}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 = 11$ | $\bar{y}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2 = 4,8$ | $\overline{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i = 7,2$ |

Знаходимо середні квадратичні відхилення та коефіцієнт кореляції:

$$\sigma_x = \sqrt{\bar{x}^2 - \bar{x}^2} = \sqrt{11 - 3^2} = \sqrt{2} \approx 1,41$$

$$\sigma_y = \sqrt{\bar{y}^2 - \bar{y}^2} = \sqrt{4,8 - 2^2} = \sqrt{0,8} \approx 0,9$$

$$r = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{7,2 - 3 \cdot 2}{1,41 \cdot 0,9} = \frac{1,2}{1,27} \approx 0,94$$

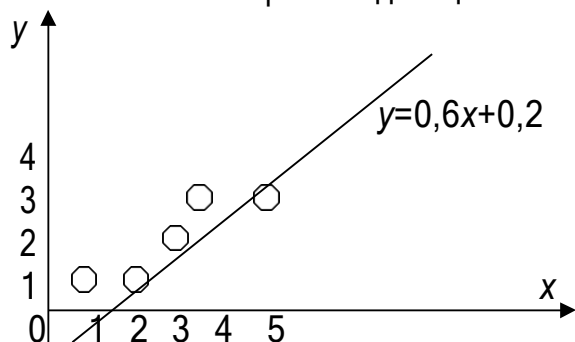
Отже, рівняння регресії має такий вигляд:

$$(y - 2) = 0,94 \cdot \frac{0,9}{1,41} (x - 3)$$

$$y - 2 = 0,6x - 1,8$$

$$y = 0,6x + 0,2 - \text{рівняння регресії}$$

Будуємо *кореляційне поле* - графік, побудований у декартовій системі координат, кожна точка якого зображає одиницю спостереження за двома корельованими ознаками.



Оскільки, коефіцієнт кореляції $r = 0,94$, то має місце сильна кореляційна залежність між випадковою величиною x та y .

Приклад 4 Розглянемо вплив мінеральних добрив на урожайність озимої пшениці.

| | I | II | III | IV | ΣV | \bar{x} гр. |
|---------------------|----|----|-----|----|------------|----------------|
| Контроль без добрив | 36 | 40 | 44 | 40 | 160 | 40 |
| НРК-80 | 48 | 52 | 46 | 46 | 192 | 48 |
| ΣP | | | | | 352 | $\bar{x} = 44$ |

Досліди проводяться одночасно, тому повторності не впливають.

1. Знаходимо обсяг вибірки

$$N = l n ; N = 2 \cdot 4 = 8$$

2. Обчислюємо середні на кожному рівні $\bar{X}_i = \frac{\sum_{i=1}^n x_{ij}}{n}$

$$\bar{X}_1 = \frac{36 + 40 + 44 + 40}{4} = \frac{160}{4} = 40 ;$$

$$\bar{X}_2 = \frac{48 + 52 + 46 + 46}{4} = \frac{192}{4} = 48 .$$

3. Визначаємо загальне середнє значення

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^e x_{ij}}{N} , \bar{X} = \frac{160 + 192}{8} = \frac{352}{8} = 44 .$$

4. Визначаємо суму квадратів відхилень спостережуваних значень від загального

середнього \bar{X} $W_{заг} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^e (x_{ij} - \bar{x})^2 .$

$$W_{заг} = (36 - 44)^2 + (40 - 44)^2 + (44 - 44)^2 + (40 - 44)^2 + (48 - 44)^2 + (52 - 44)^2 + (46 - 44)^2 + (46 - 44)^2 = 8^2 + 4^2 + 4^2 + 4^2 + 8^2 + 2^2 + 2^2 = 64 + 16 + 16 + 64 + 4 + 4 = 184$$

5. Розраховуємо факторну суму квадратів відхилень, її також називають сумою

квадратів відхилень варіантів $W_{факт.} = n \sum_{j=1}^e (x_{ij} - \bar{x})^2$.

$$W_{фак} = 4 \cdot (40 - 44)^2 + 4 \cdot (48 - 44)^2 = 4 \cdot 16 + 4 \cdot 16 = 64 + 64 = 128$$

6. Визначаємо залишкову суму квадратів відхилень $W_{зал.} = W_{заг.} - W_{факт.}$

$$W_{зал.} = 184 - 128 = 56$$

7. Визначаємо степінь вільності для дисперсії. Кількість степенів вільності для загальної дисперсії дорівнює

$$k_{заг} = N - 1, \quad k_{заг} = 8 - 1 = 7,$$

кількість степеней вільності для факторної дисперсії

$$k_{фак} = l - 1, \quad k_{фак} = 2 - 1 = 1,$$

кількість степеней вільності для залишкової дисперсії

$$k_{зал} = k_{заг} - k_{фак} \quad k_{зал} = 7 - 1 = 6.$$

8. Розраховуємо дисперсію:

$$S_{заг.}^2 = \frac{W_{заг.}}{N - 1} \quad S_{заг.}^2 = \frac{184}{7} = 26,8;$$

$$S_{факт.}^2 = \frac{W_{факт.}}{l - 1} \quad S_{факт.}^2 = \frac{128}{1} = 128;$$

$$S_{зал.}^2 = \frac{W_{зал.}}{N - l} \quad S_{зал.}^2 = \frac{56}{6} = 9,3.$$

9. Знаходимо фактичне значення критерію (критерій Фішера)

$$F_{фак} = \frac{S_{факторна}^2}{S_{залишкова}^2}; \quad F_{фак} = \frac{128}{9,3} \approx 14.$$

10. Встановлюємо рівень зчужості $\alpha = 0,05$.

11. Вибираємо із таблиці критичне значення критерію

$$F_{теор} = F(\alpha, k_{фак}, k_{зал}); \quad F_{теор} = F(0,05; 1; 6) = 5,99$$

12. Так як $F_{фак} > F_{теор}$, тому внесення мінеральних добрив істотно впливає на урожайність на рівні значимості $\alpha = 0,05$.

Завдання для самостійної роботи

Завдання 1 Розв'язати задачі.

Варіант 1

1. Написати статистичний закон розподілу і побудувати полігон відносних частот за результатами обстеження ремонтних майстерень господарств району щодо кількості слюсарів: 7, 5, 10, 8, 7, 11, 3, 9, 4, 10, 5, 9, 4, 10, 5, 9, 8, 4, 9, 6, 8, 7, 10, 12, 7, 9, 8, 4, 9, 6, 8, 7, 10, 12, 7, 9, 8, 10, 9, 9, 8, 5, 7, 7, 6, 9, 7, 8, 11, 3, 7, 9, 4, 10, 5, 8, 9, 5, 7, 6, 10, 7, 8, 7, 6,

7, 5, 9, 4, 5, 8, 8, 7, 5, 10, 4, 7, 7, 9, 8, 9, 6, 4, 8, 10, 5, 6, 6, 7, 9, 4, 8, 8. Знайти моду, медіану, розмах варіації.

2. За даними середньорічних значень сумарної фотосинтетичної активної радіації (ккал/см²) по зонах і областях України: 56,7; 54,6; 55,1; 55,2; 56,6; 53,7; 61,6; 56,2; 58,8; 58,8; 52,0; 53,3; 50,7; 51,7; 49,1; 51,6; 54,2; 51,8; 53,3; 52,1; 50,0; 48,9; 49,3; 52,2; 50,2; 50,9; 49,7 необхідно: а) скласти інтервальний ряд; б) побудувати гістограму відносних частот.

3. За результатами діяльності об'єктів малого бізнесу

| | | | | | | | | | | |
|--------------------------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|----|
| Витрати на виробництво, млн. грн., x | | | | | | | 13 | 15 | 12 | 7 |
| Балансовий прибуток, млн. грн., y | | | | | | | 44 | 40 | 41 | 20 |
| 80 | 94 | 68 | 72 | 85 | 73 | 50 | 47 | 58 | 57 | |
| 251 | 308 | 290 | 210 | 260 | 315 | 220 | 238 | 290 | 235 | |

необхідно: а) побудувати кореляційне поле; б) знайти коефіцієнт кореляції; в) записати рівняння прямої лінії регресії у на х; г) показати на кореляційному полі графік одержаного рівняння.

Варіант 2

1. За даними обліку чисельності новонароджених у пологовому будинку міста:

17 22 15 18 19 19 15 16 21 17 17 21 15 18 19 17 22 16 18
 16 21 22 19 17 17 16 18 16 18 19 21 18 17 20 21 18 20 17
 20 19 20 18 18 20 17 16 20 15 18 17 19 20 22 18 20 21 16

необхідно: а) написати статистичний закон розподілу; знайти моду і медіану; б) побудувати полігон відносних частот.

2. За даними середньої суми опадів (мм) за третю декаду липня по зонах і областях України: 15, 17, 15, 18, 14, 18, 12, 13, 13, 12, 25, 22, 23, 20, 24, 29, 19, 27, 20, 32, 28, 30, 35, 36, 27, 24 необхідно: а) скласти інтервальний ряд; б) побудувати гістограму відносних частот.

3. За результатами обстеження комерційних банків

| | | | | | | | | | |
|-----------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Рейтинг банку, x | 3,1 | 2,9 | 3,0 | 5,0 | 2,3 | 4,0 | 2,4 | 5,0 | 5,1 |
| Прибуток млн. грн., y | 25,9 | 23,4 | 21,4 | 37,0 | 18,6 | 27,7 | 19,1 | 34,5 | 38,4 |

необхідно: а) побудувати кореляційне поле; б) знайти коефіцієнт кореляції; в) записати рівняння прямої лінії регресії у на х; г) показати на кореляційному полі графік одержаного рівняння.

Варіант 3

1. За даними опитування молодих сімей щодо планування кількості дітей:

1 2 1 3 2 3 3 2 2 2 1 2 1 1 2 2 2 3 4 2
 2 2 3 2 2 1 2 1 2 1 2 3 3 3 1 2 1 2 2 3
 2 4 2 2 1 2 1 1 1 2 1 2 3 3 1 2 3 3 2 2
 2 1 2 1 2 4 2 2 1 2 1 1 3 3 1 2 1 2 2 4

необхідно: а) написати статистичний закон розподілу; б) знайти моду і медіану; в) побудувати полігон відносних частот.

2. За даними втрат вологи (т/га) за добу внаслідок запізнення з ранньовесняним боронуванням: 38, 40, 73, 60, 58, 55, 48, 59, 77, 45, 57, 60, 45, 72, 71, 52, 58, 57, 60, 35, 43, 48, 54, 59, 81, 64, 67, 72, 48, 56, 62, 69, 71, 67, 54, 61, 58, 45, 58, 52, 74, 75, 49, 63, 58, 54, 63, 39, 41, 48, 56, 71, 70, 64, 65, 60, 75, 52, 59, 70, 62 необхідно: а) скласти інтервальний ряд; б) побудувати гістограму відносних частот.

3. За результатами обстеження площ, зайнятих під озимою пшеницею

| | | | | | | | | | |
|---------------------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Середній бал якості ґрунту, x | 46 | 46 | 47 | 50 | 45 | 42 | 45 | 44 | 48 |
| Урожайність ц/га, y | 38 | 36 | 36 | 39 | 37 | 36 | 38 | 39 | 40 |

необхідно: а) побудувати кореляційне поле; б) знайти коефіцієнт кореляції; в) записати рівняння прямої лінії регресії y на x ; г) показати на кореляційному полі графік одержаного рівняння.

Варіант 4

1. За результатами вибіркового обстеження кількості полів у сівозмінах господарств Звенигородського району

7 7 9 8 10 10 8 9 9 8 9 10 10 9 10 9 8 8 8 10 10 9 8 8 8 9 9 10 7 8 9 8
 9 10 7 10 9 8 9 8 7 10 10 8 9 8 8 9 9 7 10 8 8 9 9 8 9 9 8 9 10 10 9 10 10
 9 8 8 8 9 8 8 8 9 9 10 10 7 8 9 8 9 10 8 7 10 10 8 9 10 10 8 9 8 8

необхідно: а) написати статистичний закон розподілу; б) знайти моду і медіану; в) побудувати полігон частот.

2. За результатами сортовипробування урожайності гороху (ц/га):

| | | | | | | | | | |
|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 16,3 | 16,4 | 17,3 | 17,2 | 17,4 | 18,2 | 18,1 | 19,6 | 19,5 | 19,5 |
| 20,6 | 20,2 | 20,7 | 20,2 | 20,6 | 20,5 | 20,7 | 20,1 | 20,9 | 20,6 |
| 20,8 | 20,3 | 20,0 | 20,6 | 20,9 | 20,5 | 21,8 | 21,6 | 21,3 | 21,7 |
| 21,6 | 21,3 | 21,6 | 21,3 | 21,7 | 21,3 | 21,4 | 21,2 | 21,5 | 21,7 |
| 22,1 | 22,6 | 22,3 | 22,7 | 22,2 | 22,7 | 23,9 | 23,1 | 23,2 | 23,4 |
| 25,1 | 25,1 | 25,0 | 25,0 | 19,6 | 19,6 | 19,5 | 20,5 | 20,4 | 24,1 |
| 21,3 | 21,0 | 21,9 | 21,7 | 21,2 | 20,5 | 20,4 | 20,6 | 20,2 | 24,1 |
| 21,7 | 21,2 | 22,4 | 22,5 | 22,9 | 23,0 | 23,5 | 24,0 | 19,8 | 22,7 |

побудувати інтервальний ряд розподілу ділянок за урожайністю та зобразити гістограму відносних частот.

3. За даними обстеження групи корів

| | | | | | | | | | | | |
|------------------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Рік лактації, x | 1 | 6 | 4 | 7 | 3 | 1 | 2 | 4 | 5 | 3 | |
| Середньорічний надій, т; y | 3,5 | 7,1 | 5,5 | 6,4 | 4,8 | 3,3 | 4,8 | 6,3 | 5,2 | 4,3 | |
| 3 | 2 | 3 | 6 | 3 | 4 | 2 | 5 | 5 | 4 | 3 | 5 |
| 5,1 | 3,7 | 5,2 | 6,8 | 4,8 | 5,3 | 3,9 | 4,7 | 5,9 | 6,7 | 3,8 | 7,2 |

необхідно: а) побудувати кореляційне поле; б) знайти коефіцієнт кореляції; в) записати рівняння прямої лінії регресії y на x ; г) показати на кореляційному полі графік одержаного рівняння.

Варіант 5

1. За результатами вибіркового обстеження різниці в розмірах полів овочевих сівозмін сільськогосподарських підприємств Барського району (%)

12 15 13 12 13 10 12 12 15 13 12 10 15 12 12 13 13 14 12 14 15 10 14 12 14 10 13 13 15 10
 12 10 13 15 15 14 15 12 12 14 12 10 13 13 10 12 12 15 14 14 13 13 10 12 10 12 12 10 13
 15 12 15 13 12 10 15 12 13 13 10 12 12 15 14 10 14 13 13 10 13 13 15 10 12 10 13 12 15 13
 12 10 15 12 15 необхідно: а) написати статистичний закон розподілу; б) знайти моду і медіану; в) побудувати полігон відносних частот.

2. За даними втрат (%) зерна озимого жита під час прямого комбайнування: 2,3; 2,9; 2,5; 3,8; 3,1; 2,6; 4,1; 3,6; 3,2; 3,3; 2,8; 2,7; 3,6; 3,0; 4,2; 4,1; 3,5; 3,3; 2,1; 5,2; 4,6; 3,9; 3,1; 2,8; 4,5; 2,7; 3,9; 4,1; 2,2; 3,6; 4,9; 3,1; 2,8; 3,4; 2,6; 4,2; 3,5; 3,4; 2,7 необхідно: а) скласти інтервальний ряд; б) побудувати гістограму відносних частот.

3. За результатами вивчення продуктивності соняшнику залежно від удобрення

| | | | | | | | | | |
|--------------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Доза добрив ц д.р./га, x | 2,5 | 2,9 | 2,4 | 2,0 | 4,1 | 5,0 | 4,1 | 3,4 | 3,9 |
| Урожайність ц/га, y | 17,6 | 19,5 | 18,1 | 15,0 | 27,2 | 33,0 | 24,8 | 24,0 | 28,7 |

необхідно: а) побудувати кореляційне поле; б) знайти коефіцієнт кореляції; в) записати рівняння прямої лінії регресії у на х; г) показати на кореляційному полі графік одержаного рівняння.

Варіант 6

1. За результатами вибіркового обстеження періоду повернення культур на попереднє місце у сівозмінах агрофірми "Крол" (років)

3 4 5 2 4 3 2 2 5 5 3 4 4 3 3 3 5 2 4 4 3 3 2 3 2 3 5 5 4 2 3 2 4 2 2 2 4 3 3 5 2 5 5 4 3 4 2 4 4 3
 4 2 4 4 4 3 3 2 5 4 2 2 5 5 3 4 4 3 3 2 3 2 3 5 5 3 4 2 4 4 5 5 4 2 3 2 4 2 5 5 4 3 4 2 4 3 4 4 3 3

необхідно: а) написати статистичний закон розподілу; б) знайти моду і медіану; в) побудувати полігон відносних частот.

2. За даними тривалості періоду (днів) з температурами вище 5 °С по зонах і областях України: 217, 202, 211, 205, 215, 209, 247, 222, 226, 224, 210, 205, 201, 205, 202, 193, 207, 200, 238, 207, 207, 195 необхідно: а) скласти інтервальний ряд; б) побудувати гістограму відносних частот.

3. За даними обстеження розвинутих країн

| | | | | | | | | | | | |
|---|------|------|------|------|------|------|------|-------|------|------|------|
| Валовий внутрішній продукт, млрд. \$, x | | | | | | | | 1282 | 675 | 284 | 749 |
| Споживання сталі, млн. т, y | | | | | | | | 137,3 | 70,3 | 35,3 | 84,7 |
| 642 | 348 | 927 | 1120 | 745 | 512 | 246 | 196 | 280 | 370 | 375 | 490 |
| 51,7 | 40,2 | 58,7 | 98,4 | 30,6 | 27,4 | 19,7 | 18,6 | 37,1 | 41,8 | 28,3 | 37,6 |

необхідно: а) побудувати кореляційне поле; б) знайти коефіцієнт кореляції; в) записати рівняння прямої лінії регресії у на х; г) показати на кореляційному полі графік одержаного рівняння.

Варіант 7

1. За результатами вибіркового обстеження частки зернових культур у структурах посівних площ спеціалізованих господарств із відгодівлі свиней (%)

59 61 60 63 58 60 64 62 62 61 60 59 60 64 63 63 59 62 60 60 59 58 59 63 62 63 63 64 61 61
 60 60 59 59 63 64 60 60 62 62 61 60 59 58 60 64 62 62 61 63 62 63 63 64 61 60 59 63 64 61

необхідно: а) написати статистичний закон розподілу; б) знайти моду і медіану; в) побудувати полігон відносних частот.

2. За даними вимірювання температури теплоносія (°С) під час сушіння вороху льону: 28,

31, 35 35, 28, 41, 39, 40, 37, 29, 40, 36, 39, 31, 34, 39, 40, 32, 42, 28, 35, 39, 38, 40, 41, 36, 36, 27, 29, 35, 40, 26, 35, 37, 37, 31, 34, 29, 35, 37, 34, 28, 34 необхідно: а) скласти інтервальний ряд; б) побудувати гістограму відносних частот.

3. За результатами дослідження залежності врожайності ярого ячменю від удобрення

| | | | | | | | | | | |
|--------------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Доза добрив ц д.р./га, x | 2,9 | 4,0 | 3,1 | 3,0 | 1,2 | 1,0 | 4,3 | 1,0 | 1,7 | 1,7 |
| Урожайність ц/га, y | 31,0 | 42,4 | 30,0 | 31,1 | 24,5 | 15,3 | 36,0 | 18,7 | 18,0 | 24,6 |

необхідно: а) побудувати кореляційне поле; б) знайти коефіцієнт кореляції; в) записати рівняння прямої лінії регресії у на х; г) показати на кореляційному полі графік одержаного рівняння.

Варіант 8

1. За результатами вибіркового обстеження розмірів гранул суперфосфату (мм):

3 4 4 4 3 2 4 5 2 3 3 4 3 3 4 3 1 3 4 4
 2 3 3 4 3 2 3 3 3 4 3 2 2 3 4 3 4 4 1 2
 3 3 3 4 2 3 4 3 5 4 4 1 4 4 2 3 3 5 4 3
 3 2 3 3 4 4 3 3 4 2 3 3 1 3 3 4 4 2 3 3
 4 3 5 2 4 1 2 3 3 3 4 3 4 3 3 3 4 4 3 3

необхідно: а) написати статистичний закон розподілу; б) знайти моду і медіану; в) побудувати полігон відносних частот.

2. Знайти за результатами зважування корів (ц):

4.8 3.2 3.7 4.4 4.4 4.5 4.7 4.8 5.0 5.1 5.3 5.4 4.9 4.5 4.7 4.4 4.4 3.6
 3.8 4.1 4.0 4.6 4.6 4.5 5.1 5.5 3.3 3.6 4.2 4.5 4.8 4.6 4.8 5.1 5.5 5.6
 5.0 4.9 4.9 4.7 4.1 3.9 3.4 3.4 3.7 4.2 4.6 4.5 4.7 5.1 5.1 5.3 5.0 5.7
 4.3 4.7 4.9 4.8 4.6 5.2 5.3 5.5 5.7 5.4 5.1 4.7 4.5 4.5 4.4 4.2 3.8 3.7

Скласти інтервальний ряд розподілу їх маси та побудувати гістограму відносних частот.

3. За результатами обстеження фермерських господарств

| | | | | | | | | | | |
|--------------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Земельна площа в га, x | 40 | 50 | 25 | 35 | 35 | 40 | 40 | 30 | 45 | 30 |
| Кількість працівників, y | 5 | 3 | 9 | 7 | 6 | 6 | 5 | 8 | 4 | 7 |

необхідно: а) побудувати кореляційне поле; б) знайти коефіцієнт кореляції; в) записати рівняння прямої лінії регресії у на х; г) показати на кореляційному полі графік одержаного рівняння.

Варіант 9

1. За результатами вибіркового обстеження висоти (м) крон яблунь саду:

3,2; 4,1; 2,6; 3,8; 3,5; 4,1; 4,0; 3,8; 3,6; 4,2; 4,3; 3,7; 4,0; 3,1; 3,8; 4,2; 3,6; 3,4; 3,7; 4,2; 3,3; 3,9 необхідно: а) написати статистичний закон розподілу; б) знайти моду і медіану; в) побудувати полігон частот.

2. За результатами вибіркового обстеження довжини стержнів колосків м'якої озимої пшениці (см):

7 13 12 15 10 8 6 11 12 15 10 9 9 8 14 7 13 12
 10 12 14 12 12 8 9 11 10 14 12 11 13 7 9 10 15 14
 13 8 6 9 12 14 10 7 12 13 10 10 9 14 12 11 10 10

Скласти інтервальний ряд розподілу їх маси та побудувати гістограму відносних частот.

3. За даними біржі нерухомості

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Загальна площа квартири, м ² ; x | | 63 | 68 | 79 | 84 | 65 | 70 | 70 | | | | | | |
| Вартість квартири, тис. грн.; y | | 34 | 36 | 48 | 79 | 28 | 38 | 29 | | | | | | |
| 91 | 82 | 68 | 70 | 66 | 89 | 69 | 68 | 75 | 90 | 72 | 65 | 71 | 80 | 78 |
| 84 | 60 | 28 | 41 | 36 | 65 | 32 | 29 | 48 | 70 | 39 | 30 | 65 | 65 | 58 |

необхідно: а) побудувати кореляційне поле; б) знайти коефіцієнт кореляції; в) записати рівняння прямої лінії регресії y на x ; г) показати на кореляційному полі графік одержаного рівняння.

Варіант 10

1. За результатами вибіркового обстеження найменшої вологості метрового шару суглинкових ґрунтів (мм):

175 179 183 180 176 177 179 180 181 176 178 183 181 180
 180 176 178 180 179 175 178 181 182 183 179 178 179 178
 181 180 180 183 179 176 178 179 175 176 179 178 178 180
 183 179 175 175 176 182 182 179 183 175 176 177 179 182

необхідно: а) написати статистичний закон розподілу; б) знайти моду і медіану; в) побудувати полігон частот.

2. За результатами зважування насіння м'якої озимої пшениці (г):

37 45 41 36 38 42 43 38 40 45 35 39 41 41 48
 40 32 37 43 45 39 39 42 46 41 38 37 42 35 40
 47 41 45 32 38 39 46 45 36 38 42 37 43 46 39
 34 37 42 38 42 41 47 34 41 39 44 47 45 33 38

Скласти інтервальний ряд розподілу їх маси та побудувати гістограму відносних частот.

3. За даними дослідження активів 17 комерційних банків

| | | | | | | | | | | |
|--------------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Ступінь ризику, балів, x | | 8 | 70 | 47 | 50 | 31 | 18 | | | |
| Частка активів, %, y | | 10 | 31 | 30 | 28 | 30 | 42 | | | |
| 24 | 26 | 60 | 40 | 55 | 62 | 78 | 35 | 20 | 88 | 31 |
| 40 | 38 | 28 | 31 | 32 | 35 | 28 | 35 | 42 | 34 | 37 |

необхідно: а) побудувати кореляційне поле; б) знайти коефіцієнт кореляції; в) записати рівняння прямої лінії регресії y на x ; г) показати на кореляційному полі графік одержаного рівняння.

Варіант 11

1. За результатами вибіркового обстеження чорноземів звичайних щодо вмісту гумусу (%)

3,8 4,3 4,2 4,0 3,9 3,9 4,0 4,5 3,8 3,9 4,5 4,4 4,2 4,1 4,0 4,0
 3,9 4,1 4,2 4,0 4,2 4,0 3,9 3,8 4,0 4,2 4,1 4,1 4,1 4,3 4,1 4,2
 4,0 4,5 3,8 3,9 4,1 4,0 4,0 3,8 3,9 4,1 4,0 4,1 4,2 4,0 4,2 4,2
 3,9 3,8 4,0 4,2 4,3 4,1 4,2 4,0 4,2 4,3 4,1 4,5 3,8 3,9 4,1 4,1

необхідно: а) написати статистичний закон розподілу; б) знайти моду і медіану; в) побудувати полігон частот.

2. За даними вибіркового обстеження густоти посівів квасолі (тис. рослин на 1 га): 170, 183, 220, 238, 195, 186, 170, 176, 166, 230, 242, 208, 193, 192, 217, 209, 203, 176, 189, 235, 207, 210, 165, 177, 173, 168, 192, 237, 241, 180 необхідно: а) скласти інтервальний ряд; б) побудувати гістограму відносних частот.

3. За даними перепису населення

| | | | | | | | | | | | |
|--|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Загальна чисельність населення, млн. чол.; x , | | | | | | 3,5 | 1,7 | 1,4 | 1,2 | 4,8 | |
| Частка працездатного населення, %, y | | | | | | 60 | 48 | 54 | 52 | 60 | |
| 3,7 | 2,1 | 1,8 | 0,9 | 1,7 | 1,2 | 3,4 | 2,2 | 2,9 | 2,8 | 3,1 | 2,5 |
| 57 | 46 | 46 | 52 | 49 | 50 | 55 | 48 | 55 | 48 | 59 | 47 |

необхідно: а) побудувати кореляційне поле; б) знайти коефіцієнт кореляції; в) записати рівняння прямої лінії регресії y на x ; г) показати на кореляційному полі графік одержаного рівняння.

Варіант 12

1. За результатами вибіркового визначення кислотності ґрунту чорноземів опідзолених слабокислих (рН сільової витяжки):

5,2 5,7 5,5 5,3 5,4 5,8 5,9 5,4 5,5 5,7 5,6 5,2 5,8 5,4 5,7 5,4
 5,4 5,2 5,6 5,4 5,5 5,5 5,7 5,3 5,8 5,4 5,5 5,9 5,5 5,6 5,4 5,7
 5,3 5,4 5,8 5,9 5,4 5,2 5,8 5,4 5,4 5,5 5,7 5,6 5,2 5,6 5,4 5,5
 5,4 5,5 5,5 5,7 5,3 5,9 5,5 5,6 5,3 5,8 5,4 5,5 5,4 5,8 5,9 5,4
 5,4 5,8 5,9 5,4 5,5 5,5 5,4 5,7 5,4 5,4 5,5 5,9 5,5 5,4 5,8 5,9
 5,5 5,5 5,7 5,9 5,4 5,2 5,6 5,4 5,7 5,5 5,7 5,6 5,2 5,5 5,5 5,7

необхідно: а) написати статистичний закон розподілу; б) знайти моду і медіану; в) побудувати полігон частот.

2. За результатами визначення варіювання довжини стержнів колоса озимої пшениці Білоцерківська 198 (см):

5,9 7,5 8,7 8,5 9,6 8,4 7,7 8,6 6,3 5,7 8,4 8,8 8,2 8,9 8,4 8,7
 7,3 6,5 6,0 9,0 9,1 8,6 9,0 9,0 6,5 7,9 6,8 6,7 9,5 9,7 8,8 9,9
 8,6 7,0 8,2 6,9 7,0 9,6 9,9 9,9 7,2 8,5 7,5 8,5 7,1 7,2 9,8 7,8
 7,9 7,6 8,2 7,9 8,9 6,9 7,5 8,5 8,8 8,2 7,5 8,5 7,8 8,0 7,3 9,1
 7,7 9,2 8,5 7,5 8,5 8,0 8,1 9,6 9,1 9,0 8,6 7,4 8,0 8,2 8,6 9,7

Скласти інтервальний ряд розподілу їх маси та побудувати гістограму відносних частот.

3. За вивчення розвитку економік 10 країн Східної Європи

| | | | | | | | | | | |
|--|------|------|------|------|------|------|------|------|------|-----|
| Ефективність економіки, балова оцінка, x , | 1,2 | 1,4 | 1,3 | 2,7 | 4,2 | 2,4 | 3,3 | 3,0 | 2,6 | 2,5 |
| Надійність ділового партнерства, %, y | 23,2 | 18,0 | 19,5 | 24,4 | 34,2 | 29,1 | 40,3 | 31,1 | 32,4 | 28, |

необхідно: а) побудувати кореляційне поле; б) знайти коефіцієнт кореляції; в) записати рівняння прямої лінії регресії y на x ; г) показати на кореляційному полі графік одержаного рівняння.

Варіант 13

1. За результатами визначення числа колосків в колосі озимої пшениці Білоцерківська 198 із колекційного розсадника Житомирського СГІ

22 20 17 20 19 20 19 18 19 18 21 20 20 20 20 19 12 19 18
 20 19 20 19 20 19 19 21 22 21 21 20 20 20 20 19 19 18 19
 21 21 22 20 20 20 21 17 20 20 22 20 17 21 15 19 19 20 20
 18 19 18 22 16 20 21 20 19 20 19 18 19 21 19 19 18 20 20

необхідно: а) написати статистичний закон розподілу; б) знайти моду і медіану; в) побудувати полігон частот.

2. За даними середньомісячних (квітень) значень дефіциту вологості повітря (мб) по зонах і областях України: 4,2; 7,6; 4,7; 4,4; 3,7; 4,2; 3,8; 3,9; 3,8; 4,0; 3,8; 3,9; 3,2; 3,9; 4,1; 3,9; 4,0; 3,6; 3,6; 3,5; 3,5; 4,3; 3,6; 3,5; 3,6; 3,3; 5,4; 6,5; 4,7; 3,8; 4,0; 3,9; 4,1; 3,9; 4,0; 4,0; 3,8; 3,9; 3,2; 3,8; 3,9; 3,8; 4,0; 4,7; 4,4; 4,5; 4,4; 4,0; 3,8; 3,9; 3,2; 3,8 необхідно: а) скласти інтервальний ряд; б) побудувати гістограму відносних частот.

3. За даними дослідження економічного розвитку країн

| | | | | | | | | | |
|---|------|------|------|------|------|-------|------|------|------|
| Кількість населення, млн. чол., x, | | | | | | 232 | 154 | 78 | |
| Валовий внутрішній продукт, млрд. \$, y | | | | | | 129,9 | 73,1 | 30,6 | |
| 103 | 90 | 110 | 81 | 65 | 48 | 52 | 68 | 66 | 48 |
| 65,3 | 54,7 | 65,9 | 37,3 | 41,4 | 25,9 | 31,7 | 32,7 | 28,1 | 25,5 |

необхідно: а) побудувати кореляційне поле; б) знайти коефіцієнт кореляції; в) записати рівняння прямої лінії регресії y на x ; г) показати на кореляційному полі графік одержаного рівняння.

Варіант 14

1. За результатами вибіркового обстеження глинисто-піщаних ґрунтів щодо наявності глинистих часток (%)

7 6 4 9 6 7 5 8 4 9 5 7 6 5 8 5 4 5 8
 10 5 8 6 8 6 4 8 5 7 5 8 5 6 9 7 5 8 5
 7 8 4 8 7 5 6 8 5 7 8 5 8 5 7 5 8 5 7
 6 8 5 7 8 5 8 8 5 8 5 7 8 9 5 8 9 5 6

необхідно: а) написати статистичний закон розподілу; б) знайти моду і медіану; в) побудувати полігон частот.

2. За даними середньорічного дефіциту вологості повітря (мб) необхідно: по зонах і областях України: 5,0; 5,4; 5,3; 5,1; 5,2; 4,8; 4,6; 5,0; 4,7; 5,1; 3,9; 4,0; 4,4; 3,7; 3,5; 4,7; 3,6; 4,2; 3,2; 5,2; 4,8; 4,6; 5,0; 4,7; 5,1; 3,9; 3,9; 4,0; 4,4; 3,7; 3,5; 4,7; 3,6; 4,2; 3,2; 3,4; 3,3; 3,4; 3,3; 3,4; 3,7; 3,3; 3,2; 3,4; 3,6; 5,2; 4,8; 4,6; 5,0; 4,7; 4,7; 3,6; 4,2; 3,2; 5,2; 3,3; 3,2; 5,2; 3,4; 3,6; 5,2; 4,8 необхідно: а) скласти інтервальний ряд; б) побудувати гістограму відносних частот.

3. За результатами діяльності об'єктів малого бізнесу

| | | | | | | | | | | |
|--|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Витрати на виробництво, млн. грн., x | | | | | | 13 | 15 | 12 | 77 | |
| Балансовий прибуток, млн. грн., y | | | | | | 44 | 40 | 41 | 208 | |
| 80 | 94 | 68 | 72 | 85 | 73 | 50 | 47 | 58 | 57 | 62 |
| 251 | 308 | 290 | 210 | 260 | 315 | 220 | 238 | 290 | 235 | 247 |

необхідно: а) побудувати кореляційне поле; б) знайти коефіцієнт кореляції; в) записати рівняння прямої лінії регресії y на x ; г) показати на кореляційному полі графік одержаного рівняння.

Варіант 15

1. За результатами вибіркового визначення гідролітичної кислотності передгірських та гірських ґрунтів Карпат (мг-екв. на 100 г ґрунту)

5 5 4 7 7 3 4 5 6 5 3 6 4 5 3 6 4 4 4
5 3 5 5 6 5 6 4 7 6 5 6 4 5 4 4 5 4 4
4 5 4 5 7 4 5 3 5 4 3 5 4 3 5 4 6 3 6
6 5 6 4 7 6 6 4 5 6 4 5 6 4 5 4 7 4 5

необхідно: а) написати статистичний закон розподілу; б) знайти моду і медіану; в) побудувати полігон частот.

2. За даними обстеження товщини (см) гумусового профілю першого поля зернобурякової сівозміни ВСГАТ "Джерельне": 55, 71, 80, 61, 75, 90, 83, 60, 54, 83, 86, 70, 63, 69, 70, 58, 83, 48, 60, 67, 82, 84, 76, 75, 89, 62, 65, 67, 66, 81, 80, 78 необхідно: а) скласти інтервальний ряд; б) побудувати гістограму відносних частот.

3. За результатами обстеження комерційних банків

| | | | | | | | | | | |
|-------------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Рейтинг банку, x | 3,1 | 2,9 | 3,0 | 5,0 | 2,3 | 4,0 | 2,4 | 5,0 | 5,1 | 4,0 |
| Прибуток млн. грн., y | 25,9 | 23,4 | 21,4 | 37,0 | 18,6 | 27,7 | 19,1 | 34,5 | 38,4 | 31,6 |

необхідно: а) побудувати кореляційне поле; б) знайти коефіцієнт кореляції; в) записати рівняння прямої лінії регресії y на x ; г) показати на кореляційному полі графік одержаного рівняння.

Варіант 16

1. За даними середньомісячної температури повітря ($^{\circ}\text{C}$) по зонах і областях України: 0, -2, 0, -1, 0, 0, 3, 2, 2, 2, -1, 0, -1, -1, -2, 0, -2, 0, 0, -2, 0, 0, 0, 4, 1, 1, 0, -2 необхідно: а) скласти статистичний закон розподілу; б) знайти моду, медіану, розмах варіації; в) побудувати полігон відносних частот.

2. За даними вибіркового обстеження тканин: 4.2, 4.5, 3.1, 5.1, 4.3, 4.7, 3.5, 4.4, 5.3, 3.7, 4.0, 4.8, 4.6, 3.0, 3.2, 5.2, 4.2, 3.9, 4.8, 4.6, 4.2, 2.9, 3.8, 5.6, 4.4, 5.5, 4.1, 4.3, 4.5, 5.4, 3.0, 4.1, 4.6, 3.0, 5.2, 4.2, 4.8, 3.4, 4.5, 5.0, 3.8, 3.8, 4.9, 4.5, 3.1, 5.3, 4.2, 4.2, 4.4, 4.1 скласти інтервальний ряд і побудувати гістограму відносних частот середнього балу якості.

3. За результатами обстеження площ, зайнятих під озимую пшеницею

| | | | | | | | | | | |
|---------------------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Середній бал якості ґрунту, x | 46 | 46 | 47 | 50 | 45 | 42 | 45 | 44 | 48 | 47 |
| Урожайність ц/га, y | 38 | 36 | 36 | 39 | 37 | 36 | 38 | 39 | 40 | 41 |

необхідно: а) побудувати кореляційне поле; б) знайти коефіцієнт кореляції; в)

записати рівняння прямої лінії регресії y на x ; г) показати на кореляційному полі графік одержаного рівняння.

Варіант 17

1. За результатами вибіркового обстеження корів щодо отелів: 7, 6, 1, 2, 8, 7, 5, 3, 4, 4, 5, 1, 1, 10, 6, 4, 5, 5, 2, 2, 2, 2, 3, 5, 5, 4, 6, 9, 1, 1, 4, 5, 3, 5, 5, 7, 8, 2, 1, 6, 7, 1, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 7, 7, 8 записати статистичний закон розподілу знайти моду, медіану, розмах варіації і побудувати полігон частот.

2. За даними внесення органічних добрив (т/га) при зрошенні на темнокаштанових ґрунтах: 63, 61, 70, 72, 68, 80, 90, 83, 72, 70, 75, 63, 61, 68, 73, 67, 68, 73, 85, 84, 74, 82, 67, 67, 85, 71, 70, 45, 51, 60, 64, 57, 59, 65, 46, 70, 65, 58, 52, 63 необхідно: а) скласти інтервальний ряд; б) побудувати гістограму відносних частот.

3. За результатами обстеження комерційних банків

| | | | | | | | | | | |
|-------------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Рейтинг банку, x | 3,1 | 2,9 | 3,0 | 5,0 | 2,3 | 4,0 | 2,4 | 5,0 | 5,1 | 4,0 |
| Прибуток млн. грн., y | 25,9 | 23,4 | 21,4 | 37,0 | 18,6 | 27,7 | 19,1 | 34,5 | 38,4 | 31,6 |

необхідно: а) побудувати кореляційне поле; б) знайти коефіцієнт кореляції; в) рівняння прямої лінії регресії y на x ; г) показати на кореляційному полі графік одержаного рівняння.

Варіант 18

1. За результатами вибіркового обстеження потужності гумусового профілю темнокаштанових ґрунтів Присиваської рівнини (см):

52 58 57 55 51 56 52 54 55 57 54 55 50 60 53 59 52 52 54
 52 57 58 57 54 59 53 56 56 52 52 51 54 59 53 53 50 52 60
 57 58 54 51 54 54 56 54 57 54 58 52 51 50 58 59 56 56 57
 55 57 54 55 50 52 58 58 55 51 56 52 52 54 51 51 54 58 52
 56 56 52 52 51 52 57 58 57 54 59 53 50 52 60 60 51 56 52
 57 54 58 52 51 57 58 54 51 54 54 56 56 56 57 53 54 59 53

необхідно: а) скласти інтервальний ряд; б) побудувати гістограму відносних частот.

2. За даними сум активних (вище 5 °С) середньодобових температур повітря наростаючим підсумком на кінець травня по зонах і областях України: 740, 691, 724, 707, 738, 675, 742, 774, 775, 640, 619, 630, 675, 606, 635, 689, 634, 673, 720, 630, 629, 611, 889, 602, 610, 626, 611 необхідно: а) написати варіаційний ряд;

б) знайти моду, медіану, розмах варіації; в) побудувати полігон відносних частот.

3. За результатами діяльності об'єктів малого бізнесу

| | | | | | | | | | | |
|--|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Витрати на виробництво, млн. грн., x | | | | | | 13 | 15 | 12 | 77 | |
| Балансовий прибуток, млн. грн., y | | | | | | 44 | 40 | 41 | 208 | |
| 80 | 94 | 68 | 72 | 85 | 73 | 50 | 47 | 58 | 57 | 62 |
| 251 | 308 | 290 | 210 | 260 | 315 | 220 | 238 | 290 | 235 | 247 |

необхідно: а) побудувати кореляційне поле; б) знайти коефіцієнт кореляції; в) записати рівняння прямої лінії регресії y на x ; г) показати на кореляційному полі графік одержаного рівняння.

Варіант 19

1. За результатами вибіркового обстеження частки кормових культур у польових сівозмінах господарств району (%)

45 46 45 48 45 47 42 50 48 49 42 43 46 46 45 46 45 47 42
 46 48 46 45 45 47 44 44 42 43 44 45 45 44 47 49 50 45 42
 44 43 45 45 48 44 46 42 44 48 49 49 50 50 48 46 46 42 42
 45 44 47 49 50 44 44 42 43 44 45 48 45 47 42 50 48 49 45

необхідно: а) написати статистичний закон розподілу; б) знайти моду і медіану; в) побудувати полігон відносних частот.

2. За даними суми активних (вище 5 °С) середньодобових температур повітря наростаючим підсумком на кінець першої декади квітня по зонах і областях України: 65, 23, 47, 30, 51, 39, 96, 75, 87, 77, 25, 24, 14, 16, 10, 28, 19, 27, 26, 75, 40, 24, 8, 162, 35, 43, 20, 38, 30, 51, 39, 23, 47, 30, 51, 39, 56, 50 необхідно: а) скласти інтервальний ряд; б) побудувати гістограму відносних частот.

3. За результатами реалізації продукції малими підприємствами

| | | | | | | | | | | | |
|-----------------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Прибуток, тис. грн., x | | | | | | | 600 | 140 | 630 | 470 | 375 |
| Рівень рентабельності, %; y | | | | | | | 12 | 7 | 21 | 22 | 8 |
| 270 | 382 | 420 | 527 | 620 | 180 | 170 | 280 | 292 | 395 | 480 | |
| 12 | 15 | 8 | 22 | 25 | 5 | 9 | 14 | 17 | 20 | 21 | |

необхідно: а) побудувати кореляційне поле; б) знайти коефіцієнт кореляції; в) записати рівняння прямої лінії регресії у на x; г) показати на кореляційному полі графік одержаного рівняння.

Варіант 20

1. За даними дослідження витрат пального (кг/га) при заорюванні чагарників з верби, берези чи вільхи на торфо-болотних ґрунтах: 48, 50, 55, 51, 56, 49, 47, 48, 52, 50, 50, 52, 51, 53, 54, 47, 49, 50, 50, 55, 52, 51, 49, 48, 52, 50, 51, 54, 52, 51, 50, 50, 48, 49, 50, 54, 53, 49, 48, 50, 51, 51, 55, 54, 48, 52, 47, 54, 48, 52, 50, 50, 52, 51, 53, 54, 47, 49, 50, 54, 52, 51, 50, 50, 48, 49, 50, 49, 52, 50, 55, 52, 51, 49, 48, 52, 51, 49, 48, 52, 54, 52, 51, 50, 50, 48, 49, 52, 47, 54, 48, 52, 50 необхідно: а) скласти інтервальний ряд; б) побудувати гістограму відносних частот.

2. За даними середньомісячних (липень) значень сумарної фотосинтетично активної радіації (ккал/см²) по зонах і областях України: 7,2; 8,0; 8,1; 8,0; 8,2; 7,9; 8,7; 8,0; 8,2; 8,4; 8,7; 7,9; 7,7; 7,6; 8,3; 7,6; 7,9; 8,7; 7,9; 7,3; 6,9; 7,6; 7,6; 7,4; 6,9; 7,5; 7,6; 7,4 необхідно: а) скласти інтервальний ряд; б) побудувати гістограму відносних частот.

3. За результатами обстеження продуктивних ринків

| | | | | | | | | | | |
|---|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Рентабельність реалізації продукції, %; x | 3,9 | 2,2 | 3,9 | 4,2 | 4,1 | 1,8 | 4,9 | 2,3 | 5,0 | 3,2 |
| Прибуток тис. грн., y | 22,8 | 15,4 | 20,5 | 28,2 | 25,0 | 12,6 | 27,8 | 14,8 | 29,1 | 20,4 |

необхідно: а) побудувати кореляційне поле; б) знайти коефіцієнт кореляції; в) записати рівняння прямої лінії регресії у на х; г) показати на кореляційному полі графік одержаного рівняння.

Варіант 21

1. За даними вибіркового обстеження господарств щодо числа арендних підрозділів: 1,0,2,0,3, 1,2,0,1,1,2,1,0,2,0,3, 1, 1, 1,0,3,2, 1, 1,0,1,2, 1,0, 4, 2, 0, 1, 1, 0, 4, 3, 0, 0, 2, 1, 0, 3, 0, 2, 2, 5, 0, 0 необхідно: а) скласти варіаційний ряд; б) знайти моду, медіану, розмах варіації, в) побудувати полігон відносних частот.

2. За даними тривалості періоду (днів) з температурами вище 10 °С по зонах і областях України: 175, 167, 170, 166, 176, 168, 187, 178, 181, 161, 164, 158,160, 156,161,162, 160, 166,170,157, 159. 156, 186, 160,156, 158, 157 необхідно: а) скласти інтервальний ряд; б) побудувати гістограму відносних частот.

3. За результатами звітів підприємств-емітентів ринку цінних паперів

| | | | | | | | | | | |
|------------------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Обороти активів, обороти, х | 4,1 | 1,0 | 3,8 | 3,9 | 0,7 | 4,1 | 1,2 | 3,9 | 1,3 | 0,8 |
| Рентабельність активів, %, у | 31,9 | 23,6 | 35,2 | 36,4 | 23,6 | 38,2 | 23,6 | 34,0 | 19,7 | 17,3 |

необхідно: а) побудувати кореляційне поле; б) знайти коефіцієнт кореляції; в) записати рівняння прямої лінії регресії у на х; г) показати на кореляційному полі графік одержаного рівняння.

Варіант 22

1. За даними вибіркового визначення вмісту каротину (мг на 1 кг зеленої маси) в рослинах пшениці на корм: 33, 37, 32, 38, 40, 35, 36, 35, 33, 39, 32, 34,33,38,34,35,32,36,34,38, 39, 40, 32, 34, 34,37,39, 34,33,33, 38,40, 32, 34, 33 необхідно: а) написати варіаційний ряд; б) знайти моду, медіану, розмах варіації; в) побудувати полігон відносних частот.

2. За результатами сортовипробування урожайності проса, ц/га: 23,5 24,0 24,1 24,1 25,1 25,1 16,3 16,4 17,3 17,2 17,4 18,2 18,1 19,6 19,5 19,5 19,6 19,6 19,5 20,5 20,4 20,6 20,2 20,7 20,2 20,6 20,5 20,7 20,1 20,9 20,6 20,1 20,5 20,4 20,6 20,2 20,8 20,3 20,0 20,6 20,9 20,5 21,8 21,6 21,3 21,7 21,3 21,0 21,9 21,7 21,2 21,6 21,2 21,6 21,3 21,7 21,3 скласти інтервальний ряд розподілу ділянок за урожайністю та побудувати гістограму відносних частот.

3. За даними обстеження регіонів країни

| | | | | | | | | | | | | |
|---|------|------|------|------|------|------|------|-------|------|------|-------|------|
| Густота населення, чол./км ² ; х | | | | | | 82,1 | 91,8 | 126,5 | 85,4 | 62,9 | 115,2 | |
| Рівень злочинності на 100 тис. чол.; у | | | | | | 824 | 913 | 1407 | 585 | 450 | 1036 | |
| 70,6 | 77,3 | 67,3 | 83,4 | 92,7 | 73,4 | 88,9 | 83,7 | 58,7 | 67,3 | 69,3 | 51,3 | 77,2 |
| 748 | 642 | 720 | 632 | 840 | 620 | 840 | 784 | 497 | 502 | 712 | 421 | 745 |

необхідно: а) побудувати кореляційне поле; б) знайти коефіцієнт кореляції; в) записати рівняння прямої лінії регресії у на х; г) показати на кореляційному полі графік одержаного рівняння.

Варіант 23

1. За даними реєстрації розмірів чоловічого взуття, проданого магазином за день: 39, 40, 38, 43, 41, 42, 40, 38, 41, 42, 41, 40, 42, 39, 41, 41, 36, 43, 41, 42, 38, 41, 40, 42, 41, 42, 40, 42, 40, 41, 41, 39, 42, 40, 40, 39, 41, 39, 38, 40, 41, 41, 40, 40, 39, 42, 40, 43, 37, 40, 42, 43, 42, 38, 40, 40, 41, 41, 41, 40, 43, 42, 42, 39, 43, 41, 40, 43, 41, 42, 42, 39, 43, 41, 42, 41, 42, 40, 41 необхідно: а) написати варіаційний ряд; б) знайти моду, медіану, розмах варіації; в) побудувати полігон відносних частот.

2. За даними тривалості періоду (днів) із позитивними температурами повітря по зонах і областях України: 268, 243, 252, 249, 263, 253, 308, 271, 282, 246, 250, 253, 247, 245, 236, 259, 241, 256, 250, 248, 258, 261, 250, 288, 266, 268, 257, 240 необхідно: а) скласти інтервальний ряд; б) побудувати гістограму відносних частот.

3. За результатами перевірки якості виготовлення консервів

| | | | | | | | | | | |
|--|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|
| Обсяг виготовленої продукції, тис. банок, x | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 8 | 10 | 10 | 11 | 11 |
| Кількість банок з неякісною герметизацією, y | 3 | 3 | 4 | 6 | 5 | 6 | 8 | 9 | 7 | 9 |

необхідно: а) побудувати кореляційне поле; б) знайти коефіцієнт кореляції; в) записати рівняння прямої лінії регресії y на x ; г) показати на кореляційному полі графік одержаного рівняння.

Варіант 24

1. За даними числа днів додаткової відпустки, наданої робітникам, які брали участь в заходах із захисту рослин: 3, 7, 8, 4, 5, 6, 4, 5, 6, 6, 7, 6, 9, 4, 10, 7, 8, 6, 7, 7, 9, 10, 5, 4, 6, 6, 7, 7, 8, 4, 8, 6, 6, 3, 5, 8, 4, 6, 4, 3 необхідно: а) написати варіаційний ряд; б) знайти моду, медіану, розмах варіації; в) побудувати полігон відносних частот.

2. За даними обстеження корів щодо величини надою (кг за добу): 13, 17, 23, 12, 14, 11, 18, 20, 12, 20, 16, 21, 18, 17, 22, 19, 21, 19, 26, 10, 20, 27, 19, 21, 24, 16, 18, 20, 13, 22, 21, 20, 14, 20, 25, 9, 22, 25, 16, 17, 18, 16, 13, 19, 9, 17, 20, 22, 17, 18, 20, 12, 20, 16, 21, 18, 17, 22, 18, 20, 13, 22, 21, 20, 14, 20, 21 необхідно: а) скласти інтервальний ряд; б) побудувати гістограму відносних частот.

3. За результатами перевірки якості молока

| | | | | | | | | | | |
|--|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Тривалість зберігання, днів, x | 4,0 | 2,1 | 4,2 | 4,0 | 4,1 | 2,1 | 4,9 | 2,0 | 4,9 | 3,3 |
| Показник кислотності, градуси Тернера, y | 28,8 | 18,4 | 26,5 | 34,0 | 31,2 | 15,4 | 35,5 | 18,0 | 33,0 | 25,0 |

необхідно: а) побудувати кореляційне поле; б) знайти коефіцієнт кореляції; в) записати рівняння прямої лінії регресії y на x ; г) показати на кореляційному полі графік одержаного рівняння.

Варіант 25

1. За даними середньорічної температури повітря ($^{\circ}\text{C}$) по зонах і областях України: 9, 8, 8, 8, 8, 10, 9, 8, 7, 7, 7, 9, 8, 8, 8, 10, 9, 10, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 10, 9, 9, 10, 7, 7, 10, 7, 7, 7, 8, 7, 7, 7, 7, 8, 7, 7, 7, 9, 8, 8, 8, 10, 9, 7, 7, 6, 7, 7, 7, 7, 8, 7, 7, 7, 9, 8, 8, 10, 9, 10, 7, 7, 7, 8,

8, 7, 7, 7, 6 необхідно: а) написати варіаційний ряд; б) знайти моду, медіану, розмах варіації; в) побудувати полігон частот.

2. За даними вивчення числа відкладань яєць американським білим метеликом (шт.): 266, 430, 370, 428, 278, 351, 472, 408, 363, 440, 292, 332, 447, 381, 392, 320, 294, 410, 427, 365, 317, 370, 428, 278, 351, 472, 428, 278, 351, 472, 408, 363, 340, 294, 410, 427, 365, 317, 410, 427, 365, 317, 370, 428, 278, 351, 472, 428, 278, 351, 472, 378, 392, 481, 390, 405, 362, 275, 428, 379, 423 необхідно: а) скласти інтервальний ряд; б) побудувати гістограму відносних частот.

3. За даними обстеження вибоїв вугільних шахт об'єднання

| | | | | | | | | | | | | |
|--------------------------------------|-----|----|-----|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Нахил залягання пласту, категорія, x | | | | | 2 | 3 | 1 | 3 | 2 | 1 | 2 | |
| Потужність пласту, см, y | | | | | 148 | 110 | 184 | 72 | 158 | 212 | 126 | |
| 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 1 | 2 | 1 |
| 167 | 125 | 98 | 145 | 98 | 131 | 177 | 118 | 220 | 128 | 210 | 136 | 190 |

необхідно: а) побудувати кореляційне поле; б) знайти коефіцієнт кореляції; в) записати рівняння прямої лінії регресії у на х; г) показати на кореляційному полі графік одержаного рівняння.

Варіант 26

1. За даними обліку чисельності перевезених пасажирів автобусами далекого слідування:

24 32 32 36 32 28 40 36 40 28 28 32 40 40 40 36 32 40 28
 36 40 24 40 36 32 32 32 40 36 28 28 24 40 40 36 36 32 36
 40 40 36 32 32 32 40 32 32 32 40 40 28 28 40 24 32 32 40

необхідно: а) написати статистичний закон розподілу; б) знайти моду і медіану; в) побудувати полігон відносних частот.

2. За результатами вибіркового обстеження лінійного коефіцієнта кореляції між середньодушовим доходом та кількістю дітей у сім'ї:

0,75 0,68 0,70 0,71 0,78 0,65 0,67 0,72 0,69 0,76 0,61 0,63 0,70 0,67 0,72 0,67 0,72 0,67
 0,72 0,69 0,78 0,72 0,73 0,68 0,67 0,72 0,72 0,69 0,78 0,72 0,73 0,67 0,72 0,76 0,68 0,70
 0,71 0,73, 0,67 0,76 0,65 0,67 0,72 0,76 0,68 0,70 0,71 0,76 0,65 0,67 0,72 0,76

необхідно: а) скласти інтервальний ряд; б) побудувати гістограму відносних частот.

3. За даними обстеження розвинутих країн

| | | | | | | | | | | | |
|---|------|------|------|------|------|------|------|-------|------|------|------|
| Валовий внутрішній продукт, млрд. \$, x | | | | | | | | 1282 | 675 | 284 | 749 |
| Споживання сталі, млн. т, y | | | | | | | | 137,3 | 70,3 | 35,3 | 84,7 |
| 642 | 348 | 927 | 1120 | 745 | 512 | 246 | 196 | 280 | 370 | 375 | 490 |
| 51,7 | 40,2 | 58,7 | 98,4 | 30,6 | 27,4 | 19,7 | 18,6 | 37,1 | 41,8 | 28,3 | 37,6 |

необхідно: а) побудувати кореляційне поле; б) знайти коефіцієнт кореляції; в) записати рівняння прямої лінії регресії у на х; г) показати на кореляційному полі графік одержаного рівняння.

Варіант 27

1. За даними обліку чисельності правлінь ВАТ міста:

5 8 11 12 10 5 12 9 8 10 11 6 13 7 9 7 11 10 12

11 10 5 9 11 8 7 8 8 6 13 10 11 11 12 6 7 10 6
 12 13 6 6 7 6 8 9 5 6 8 6 5 8 8 7 11 8 11
 7 8 8 6 13 5 8 8 7 12 10 5 12 9 13 6 6 7 12

необхідно: а) написати статистичний закон розподілу; б) знайти моду і медіану; в) побудувати полігон відносних частот.

2. За даними середньої суми опадів за рік (мм) по зонах і областях України: 425, 456, 433, 484, 425, 469, 413, 412, 410, 374, 543, 513, 538, 482, 526, 595, 506, 554, 484, 653, 600, 549, 570, 870, 712, 699, 535, 546 необхідно: а) скласти інтервальний ряд; б) побудувати гістограму відносних частот.

3. За результатами вивчення продуктивності соняшнику залежно від удобрення

| | | | | | | | | | | |
|--------------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Доза добрив ц д.р./га, x | 2,5 | 2,9 | 2,4 | 2,0 | 4,1 | 5,0 | 4,1 | 3,4 | 3,9 | 5,0 |
| Урожайність ц/га, y | 17,6 | 19,5 | 18,1 | 15,0 | 27,2 | 33,0 | 24,8 | 24,0 | 28,7 | 30,5 |

необхідно: а) побудувати кореляційне поле; б) знайти коефіцієнт кореляції; в) записати рівняння прямої лінії регресії у на х; г) показати на кореляційному полі графік одержаного рівняння.

Варіант 28

1. За результатами обстеження дипломних робіт випускників ФМП щодо кількості згрупованих даних у вигляді таблиць:

7 15 17 9 10 14 15 16 8 15 14 10 9 12 12 13 17 12 11
 8 10 15 14 11 16 8 12 10 9 13 10 10 8 16 17 10 11 13
 15 8 15 14 10 9 9 12 9 9 15 15 10 17 14 12 12 15 11

необхідно: а) написати статистичний закон розподілу; б) знайти моду і медіану; в) побудувати полігон відносних частот.

2. За результатами вибіркового обстеження жирності молока (%);

3,8 3,1 3,5 4,1 3,7 3,4 2,9 3,7 3,6 3,9 3,4 3,5 3,6 3,4 3,1 3,8 3,5 3,7 3,4 3,8 3,9
 3,6 3,8 3,7 3,9 3,8 3,8 3,6 4,1 4,0 3,7 3,6 3,6 3,5 3,9 3,9 3,9 4,0 3,6 3,5 3,7 3,4
 3,7 3,4 3,8 3,7 3,4 3,8 3,9 3,6 3,7 3,4 3,8 3,9 3,6 3,8

необхідно: а) скласти інтервальний ряд; б) побудувати гістограму відносних частот.

3. За результатами обстеження площ, зайнятих під озимую пшеницею

| | | | | | | | | | | |
|-------------------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Середній бал якості ґрунту, x | 6 | 6 | 7 | 0 | 5 | 2 | 5 | 4 | 8 | 7 |
| Урожайність ц/га, y | 8 | 6 | 6 | 9 | 7 | 6 | 8 | 9 | 0 | 1 |

необхідно: а) побудувати кореляційне поле; б) знайти коефіцієнт кореляції; в) записати рівняння прямої лінії регресії у на х; г) показати на кореляційному полі графік одержаного рівняння.

Варіант 29

1. За результатами вибіркового обстеження вартості монет у касі (коп.)

10 25 25 10 50 10 5 50 10 10 5 2 2 1 25 10 50 10 10
 2 25 10 10 25 50 5 10 5 5 25 2 10 1 10 5 10 25 25
 25 10 25 5 5 10 10 50 25 5 5 10 10 10 25 2 2 50 10
 10 50 50 5 2 10 2 5 10 25 50 10 10 25 10 1 5 25 10

необхідно: а) написати статистичний закон розподілу; б) знайти моду і медіану; в) побудувати полігон відносних частот.

2. За даними середньомісячних (червень) значень сумарної фотосинтетично активної радіації (ккал/см²) по зонах і областях України: 8,2; 8,2; 8,1; 8,0; 8,2; 7,9; 8,7; 8,0; 8,2; 8,4; 7,7; 7,9; 7,7; 7,6; 7,3; 7,6; 7,9; 7,7; 7,9; 7,3; 7,4; 7,6; 7,6; 7,4; 6,9; 7,5; 7,6; 7,4 необхідно: а) скласти інтервальний ряд; б) побудувати гістограму відносних частот.

3. За результатами обстеження комерційних банків

| | | | | | | | | | | |
|-------------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Рейтинг банку, x | 3,1 | 2,9 | 3,0 | 5,0 | 2,3 | 4,0 | 2,4 | 5,0 | 5,1 | 4,0 |
| Прибуток млн. грн., y | 25,9 | 23,4 | 21,4 | 37,0 | 18,6 | 27,7 | 19,1 | 34,5 | 38,4 | 31,6 |

необхідно: а) побудувати кореляційне поле; б) знайти коефіцієнт кореляції; в) записати рівняння прямої лінії регресії y на x ; г) показати на кореляційному полі графік одержаного рівняння.

Варіант 30

1. За результатами вибіркового обстеження часу використання багаторічних трав на осушених землях Волині (років)

2 3 2 4 3 5 3 3 3 4 5 4 4 2 2 4 3 4 3 4 4 4 3 3 5 3 2 4 3 5 2 4 5 2 3 5 4 2 3 4 3 2 4 3 5 2 4 2 2 4
3 3 5 3 2 4 5 3 4 2 3 4 3 4 2 3 2 3 3 4 5 4 3 4 2 3 5 4 4 3 3 3 3 4 5 4 4 2 2 4 3 3 5 3 2 4 3 5 3 3
2 4 3 5 2 4 5 2 3 5 3 4 2 3 2 3 3 4 3 4

необхідно: а) написати статистичний закон розподілу; б) знайти моду і медіану;

в) побудувати полігон відносних частот.

1. За результатами вибіркового зважування бичків (ц):

3,2 3,7 4,4 4,4 4,5 4,7 4,8 5,0 5,1 5,3 5,4 4,9 4,8 4,6 5,2 5,3 4,4 3,6 3,3 3,3 3,8 4,1
4,0 4,6 4,6 4,5 5,1 5,5 3,7 4,0 4,0 4,9 4,5 4,8 4,6 4,8 5,1 5,5 5,6 5,7 5,0 4,9 4,9 4,7
5,4 4,5 4,6 5,2 3,4 3,7 4,2 5,4 4,6 4,5 4,7 5,1 5,1 5,8 3,4 4,0 3,3 3,6 4,2 4,3 4,8 5,3
5,0 5,7 3,5 4,3 4,7 4,9 4,8 4,6 5,2 5,3 4,8 5,3 5,0 5,7

знайти інтервальний ряд розподілу їх маси та побудувати гістограму відносних частот.

2. За результатами діяльності об'єктів малого бізнесу

| | | | | | | | | | | |
|--|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Витрати на виробництво, млн. грн., x | | | | | | 13 | 15 | 12 | 77 | |
| Балансовий прибуток, млн. грн., y | | | | | | 44 | 40 | 41 | 208 | |
| 80 | 94 | 68 | 72 | 85 | 73 | 50 | 47 | 58 | 57 | 62 |
| 251 | 308 | 290 | 210 | 260 | 315 | 220 | 238 | 290 | 235 | 247 |

необхідно: а) побудувати кореляційне поле; б) знайти коефіцієнт кореляції; в) записати рівняння прямої лінії регресії y на x ; г) показати на кореляційному полі графік одержаного рівняння.

Завдання 4 Розв'язати задачі.

1. За результатами сортовипробування озимої пшениці

| Сорт | Урожайність по повторностях, ц/га | | | |
|--------------|-----------------------------------|------|------|------|
| Гібрид 481 | 32,2 | 32,7 | 42,6 | 33,3 |
| Безоста 4 | 45,7 | 45,3 | 40,7 | |
| Скороспілка | 49,4 | 46,7 | 50,9 | |
| Новоукраїнка | 37,5 | 35,8 | 32,1 | 38,9 |
| Приазовська | 39,0 | 37,8 | | |

методом дисперсійного аналізу при рівні значущості 0,05 вивчити вплив сорту на

врожайність.

2. За результатами конкурсного сортовипробування озимого ячменю

| Попередник | Урожайність, ц/га | | | |
|-------------------|-------------------|------|------|------|
| Багаторічні трави | 35,2 | 35,2 | 32,2 | 33,8 |
| Чорний пар | 42,4 | 37,4 | 40,7 | 38,2 |
| Соняшник | 32,4 | 33,3 | 34,8 | 34,6 |

методом дисперсійного аналізу при рівні значущості $\alpha = 0,05$ вивчити вплив попередника на урожайність.

3. За результатами сортовипробування гречки

| Сорт | Урожайність по повторностях, ц/га | | | |
|-------------|-----------------------------------|------|------|------|
| Вікторія | 19,1 | 18,7 | 16,3 | 11,7 |
| Крупинка | | 18,5 | 19,7 | 12,7 |
| Лілея | 21,1 | 19,2 | | |
| Устимівська | 12,7 | 15,7 | 18,9 | |
| Климівка | 29,3 | 25,7 | | 25,4 |

методом дисперсійного аналізу при рівні значущості $0,05$ вивчити вплив сорту на врожайність.

4. За результатами конкурсного сортовипробування гречки

| Сорт | Урожайність по повторностях, ц/га | | | |
|-------------------|-----------------------------------|------|------|------|
| Багаторічні трави | 45,7 | 44,2 | 43,7 | 44,0 |
| Чорний пар | 52,5 | 50,1 | 53,8 | 50,7 |
| Соняшник | 43,2 | 44,1 | 46,8 | 43,9 |

методом дисперсійного аналізу при рівні значущості $\alpha = 0,05$ вивчити вплив попередника на урожайність.

5. За результатами сортовипробування озимого жита

| Сорт | Урожайність по повторностях, ц/га | | | |
|---------------|-----------------------------------|------|------|------|
| Радзима | 53,3 | | 52,3 | 50,7 |
| Ржанка | 42,1 | 45,7 | | 42,5 |
| Орловське 9 | 50,2 | 49,4 | 48,2 | 51,0 |
| Київське 86 | | | 52,7 | 50,9 |
| Харківське 88 | 63,5 | 61,7 | 58,4 | 57,9 |

методом дисперсійного аналізу при рівні значущості $0,05$ вивчити вплив сорту на врожайність.

6. За результатами конкурсного сортовипробування гороху

| Попередник | Урожайність, ц/га | | | |
|-------------------|-------------------|------|------|------|
| Чорний пар | 34,2 | 31,3 | 33,3 | 32,8 |
| Кукурудза | 25,8 | 26,3 | 25,4 | 28,1 |
| Багаторічні трави | 27,0 | 29,0 | 28,4 | 30,6 |

методом дисперсійного аналізу при рівні значущості $\alpha = 0,05$ вивчити вплив попередника на урожайність.

7. За результатами обстеження продуктивності цукрових буряків

| Зона зволоження | Урожайність, ц/га | | | |
|-----------------|-------------------|-----|-----|-----|
| | Недостатнього | 210 | 205 | 220 |
| Нестійкого | 220 | 225 | 220 | 230 |
| Достатнього | 240 | 230 | 235 | 230 |

методом дисперсійного аналізу при рівні значущості 0,05 вивчити вплив природно-кліматичних зон на урожайність цукрових буряків.

8. За результатами конкурсного сортовипробування ярової пшениці

| Сорт | Урожайність, ц/га | | | |
|----------------|-------------------|------|------|------|
| | Мільтурум 553 | 29,7 | 33,1 | 32,8 |
| Альбідіум 3700 | 25,8 | 26,3 | 25,4 | 28,1 |
| Зміна | 25,2 | 25,8 | 24,3 | 26,3 |

методом дисперсійного аналізу при рівні значущості $\alpha = 0,05$ вивчити вплив сорту на урожайність.

9. За результатами сортовипробування столових буряків

| Сорт | Урожайність по повторностях, ц/га | | | |
|------------|-----------------------------------|-----|------|------|
| | Носівський плоский | | 1195 | 917 |
| Бордо 237 | 1232 | 891 | 1282 | 1135 |
| Айняй | 1237 | | | 1236 |
| Раннє чудо | 1044 | 970 | 1116 | 1163 |

методом дисперсійного аналізу при рівні значущості 0,01 вивчити вплив сорту на врожайність.

10. За результатами сортовипробування озимого рапсу

| Озимий рапс | Урожайність по повторностях, ц/га | | | |
|-------------|-----------------------------------|------|------|------|
| | Тамара | 20,5 | 21,9 | 22,3 |
| Родана | 21,4 | 23,2 | 22,9 | |
| Гарант | 18,2 | 16,5 | | |
| Діана | 17,0 | 15,9 | 17,4 | 16,8 |

методом дисперсійного аналізу при рівні значущості 0,05 вивчити вплив сорту на врожайність.

11. За результатами сортовипробування озимої пшениці

| Сорт | Урожайність, ц/га | | | |
|---------------|-------------------|------|------|------|
| | Новоукраїнка 84 | 32,4 | 33,3 | 34,8 |
| Безоста 4 | 43,2 | 44,1 | 46,8 | 43,9 |
| Скороспілка 3 | 54,3 | 54,6 | 58,3 | 60,5 |

методом дисперсійного аналізу при рівні значущості $\alpha = 0,05$ вивчити вплив сорту на урожайність.

12. За результатами конкурсного сортовипробування озимого ячменю

| Попередник | Урожайність, ц/га | | | |
|-------------------|-------------------|------|------|------|
| | | | | |
| Багаторічні трави | 35,2 | 35,2 | 32,2 | 33,8 |
| Чорний пар | 42,4 | 37,4 | 40,7 | 38,2 |
| Соняшник | 32,4 | 33,3 | 34,8 | 34,6 |

методом дисперсійного аналізу при рівні значущості $\alpha = 0,05$ вивчити вплив попередника на урожайність.

13. За результатами обстеження господарств Кіровоградської області

| № п/п | Урожайність соняшнику (ц/га) у господарствах | | |
|-------|--|--------|----------|
| | Удове | Веселе | Травневе |
| 1 | 17,0 | 15,3 | 14,7 |
| 2 | 15,2 | 9,2 | 13,2 |
| 3 | 11,1 | 16,0 | |

методом дисперсійного аналізу при рівні значущості 0,01 перевірити гіпотезу про рівність середніх урожайностей соняшнику у наведених господарствах.

14. За результатами конкурсного сортовипробування гороху

| Попередник | Урожайність, ц/га | | | |
|-------------------|-------------------|------|------|------|
| | | | | |
| Чорний пар | 34,2 | 31,3 | 33,3 | 32,8 |
| Кукурудза | 25,8 | 26,3 | 25,4 | 28,1 |
| Багаторічні трави | 27,0 | 29,0 | 28,4 | 30,6 |

методом дисперсійного аналізу при рівні значущості $\alpha = 0,05$ вивчити вплив попередника на урожайність.

15. За результатами конкурсного сортовипробування гречки

| Сорт | Урожайність по повторностях, ц/га | | | |
|-------------------|-----------------------------------|------|------|------|
| | | | | |
| Багаторічні трави | 45,7 | 44,2 | 43,7 | 44,0 |
| Чорний пар | 52,5 | 50,1 | 53,8 | 50,7 |
| Соняшник | 43,2 | 44,1 | 46,8 | 43,9 |

методом дисперсійного аналізу при рівні значущості $\alpha = 0,05$ вивчити вплив попередника на урожайність.

16. За результатами сортовипробування квасолі

| Квасоля | Урожайність по повторностях, ц/га | | | |
|------------|-----------------------------------|------|------|------|
| | | | | |
| Горналь | 32,7 | | 32,2 | 30,8 |
| Сперанца | 32,8 | 35,1 | | |
| Світла | 31,1 | | 30,6 | 27,5 |
| Мітільська | 28,6 | 25,8 | 30,6 | 29,5 |

методом дисперсійного аналізу при рівні значущості 0,05 вивчити вплив сорту на врожайність.

17.3а результатами конкурсного сорто випробування гороху

| Попередник | Урожайність, ц/га | | | |
|-------------------|-------------------|------|------|------|
| Чорний пар | 34,2 | 31,3 | 33,3 | 32,8 |
| Кукурудза | 25,8 | 26,3 | 25,4 | 28,1 |
| Багаторічні трави | 27,0 | 29,0 | 28,4 | 30,6 |

методом дисперсійного аналізу при рівні значущості $\alpha = 0,05$ вивчити вплив попередника на

18. За результатами обстеження продуктивності цукрових буряків

| Зона зволоження | Урожайність, ц/га | | | |
|-----------------|-------------------|-----|-----|-----|
| Недостатнього | 210 | 205 | 220 | 210 |
| Нестійкого | 220 | 225 | 220 | 230 |
| Достатнього | 240 | 230 | 235 | 230 |

методом дисперсійного аналізу при рівні значущості 0,5 вивчити вплив природно-кліматичних зон на урожайність цукрових буряків.

19. За результатами конкурсного сорто випробування ярової пшениці

| Сорт | Урожайність, ц/га | | | |
|---------------|-------------------|------|------|------|
| Мільтурум 553 | 29,7 | 33,1 | 32,8 | 29,7 |
| Альбідум 3700 | 25,8 | 26,3 | 25,4 | 28,1 |
| Зміна | 25,2 | 25,8 | 24,3 | 26,3 |

методом дисперсійного аналізу при рівні значущості $\alpha = 0,5$ вивчити вплив сорту на урожайність.

20.3а результатами сорто випробування кукурудзи

| Кукурудза | Урожайність по повторностях, ц/га | | | |
|-------------|-----------------------------------|-------|-------|-------|
| Колективний | 101,7 | 110,0 | 70,4 | 75,9 |
| Алатау | | 98,6 | 102,7 | 85,7 |
| Бемо | 92,9 | 89,7 | 98,5 | 109,3 |

методом дисперсійного аналізу при рівні значущості 0,5 вивчити вплив сорту на врожайність.

21.3а результатами сорто випробування озимого рапсу

| Озимий рапс | Урожайність по повторностях, ц/га | | | |
|-------------|-----------------------------------|------|------|------|
| Тамара | 20,5 | 21,9 | 22,3 | 19,5 |
| Родана | 21,4 | 23,2 | 22,9 | |
| Гарант | 18,2 | 16,5 | | |
| Діана | 17,0 | 15,9 | 17,4 | 16,8 |

методом дисперсійного аналізу при рівні значущості 0,05 вивчити вплив сорту на врожайність.

22.3а результатами сортовипробування озимої пшениці

| Сорт | Урожайність, ц/га | | | |
|-----------------|-------------------|------|------|------|
| Новоукраїнка 84 | 32,4 | 33,3 | 34,8 | 34,6 |
| Безоста 4 | 43,2 | 44,1 | 46,8 | 43,9 |
| Скороспілка 3 | 54,3 | 54,6 | 58,3 | 60,5 |

методом дисперсійного аналізу при рівні значущості $\alpha = 0,05$ вивчити вплив сорту на урожайність.

23. За результатами сортовипробування озимого жита

| Сорт | Урожайність по повторностях, ц/га | | | |
|-------------|-----------------------------------|------|------|------|
| Радзима | 53,3 | | 52,3 | 50,7 |
| Ржанка | 42,1 | 45,7 | | 42,5 |
| Орловське 9 | 50,2 | 49,4 | 48,2 | 51,0 |
| Київське 86 | | | 52,7 | 50,9 |

методом дисперсійного аналізу при рівні значущості 0,01 вивчити вплив сорту на врожайність.

24.3а результатами конкурсного сортовипробування озимого ячменю

| Попередник | Урожайність, ц/га | | | |
|-------------------|-------------------|------|------|------|
| Багаторічні трави | 35,2 | 35,2 | 32,2 | 33,8 |
| Чорний пар | 42,4 | 37,4 | 40,7 | 38,2 |
| Соняшник | 32,4 | 33,3 | 34,8 | 34,6 |

методом дисперсійного аналізу при рівні значущості $\alpha = 0,05$ вивчити вплив попередника на урожайність.

25.3а результатами сортовипробування квасолі

| Квасоля | Урожайність по повторностях, ц/га | | | |
|------------|-----------------------------------|------|------|------|
| Горналь | 32,7 | | 32,2 | 30,8 |
| Сперанца | 32,8 | 35,1 | | |
| Світла | 31,1 | | 30,6 | 27,5 |
| Мітільська | 28,6 | 25,8 | 30,6 | 29,5 |

методом дисперсійного аналізу при рівні значущості 0,05 вивчити вплив сорту на врожайність.

26. За результатами конкурсного сортовипробування гречки

| Сорт | Урожайність по повторностях, ц/га | | | |
|-------------------|-----------------------------------|------|------|------|
| Багаторічні трави | 45,7 | 44,2 | 43,7 | 44,0 |
| Чорний пар | 52,5 | 50,1 | 53,8 | 50,7 |
| Соняшник | 43,2 | 44,1 | 46,8 | 43,9 |

методом дисперсійного аналізу при рівні значущості $\alpha = 0,05$ вивчити вплив попередника на урожайність.

27.3а результатами сортовипробування столових буряків

| Сорт | Урожайність по повторностях, ц/га | | | |
|-----------|-----------------------------------|-----|------|------|
| | Носівський плоский | | 1195 | 917 |
| Бордо 237 | 1232 | 891 | 1282 | 1135 |
| Айняй | 1237 | | | 1236 |

методом дисперсійного аналізу при рівні значущості 0,01 вивчити вплив сорту на врожайність.

28.3а результатами конкурсного сортовипробування гороху

| Попередник | Урожайність, ц/га | | | |
|-------------------|-------------------|------|------|------|
| | Чорний пар | 34,2 | 31,3 | 33,3 |
| Кукурудза | 25,8 | 26,3 | 25,4 | 28,1 |
| Багаторічні трави | 27,0 | 29,0 | 28,4 | 30,6 |

методом дисперсійного аналізу при рівні значущості $\alpha = 0,05$ вивчити вплив попередника на урожайність.

29.3а результатами обстеження продуктивності цукрових буряків

| Зона зволоження | Урожайність, ц/га | | | |
|-----------------|-------------------|-----|-----|-----|
| | Недостатнього | 210 | 205 | 220 |
| Нестійкого | 220 | 225 | 220 | 230 |
| Достатнього | 240 | 230 | 235 | 230 |

методом дисперсійного аналізу при рівні значущості 0,05 вивчити вплив природно-кліматичних зон на урожайність цукрових буряків.

30.3а результатами конкурсного сортовипробування ярової пшениці

| Сорт | Урожайність, ц/га | | | |
|----------------|-------------------|------|------|------|
| | Мільтурум 553 | 29,7 | 33,1 | 32,8 |
| Альбідіум 3700 | 25,8 | 26,3 | 25,4 | 28,1 |
| Зміна | 25,2 | 25,8 | 24,3 | 26,3 |

методом дисперсійного аналізу при рівні значущості $\alpha = 0,05$ вивчити вплив сорту на урожайність.

Додатки

| | |
|--|---|
| <p>Розкладання на множники многочленна</p> $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b);$ $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2);$ $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2);$ $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2), \text{ де } x_1 \text{ та } x_2 - \text{ корені квадратного тричлена.}$ | <p>Квадратні рівняння</p> $ax^2 + bx + c = 0; \quad a \neq 0$ $D = b^2 - 4ac;$ $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$ <p>Теорема Вієта для зведеного квадратного рівняння $x^2 + px + q = 0$: $x_1 + x_2 = -p$; $x_1 x_2 = q$.</p> |
| <p>Властивості степенів</p> $a^0 = 1, \quad a \neq 0$ $a^p \cdot a^q = a^{p+q}; \quad a^p \cdot b^p = (ab)^p$ $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}; \quad \frac{a^p}{b^p} = \left(\frac{a}{b}\right)^p$ $(a^p)^q = a^{pq}$ $a^{-r} = \frac{1}{a^r}$ $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \quad \text{де } a \geq 0, m, n \in \mathbb{N}$ | <p>Корені та їх властивості</p> $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a^{mk}}, \quad \text{якщо } a \geq 0$ $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}, \quad a \geq 0, b \geq 0$ $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}, \quad a \geq 0, b \geq 0$ $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}, \quad \text{якщо } a \geq 0$ $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}, \quad \text{якщо } a \geq 0.$ |
| <p>Площа трикутника</p> $S = \frac{1}{2} ah_a; \quad S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma;$ $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)};$ $S = \frac{abc}{4R}; \quad S = pr.$ | <p>Площа паралелограма</p> $S = ah_a; \quad S = ab \sin \gamma;$ $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \beta.$ <p>Площа трапеції</p> $S = \frac{a+b}{2} h.$ |
| <p>Площа круга</p> $S = \pi r^2.$ <p>Довжина кола</p> $l = 2\pi r$ | <p>Об'єм призми</p> $V = S_{\text{основи}} \cdot H.$ <p>Об'єм піраміди</p> $V = \frac{1}{3} S_{\text{основи}} \cdot H$ |
| <p>Об'єм циліндра</p> $V = \pi R^2 H;$ <p>Площа бічної поверхні циліндра</p> $S = 2\pi RH.$ | <p>Об'єм конуса</p> $V = \frac{1}{3} \pi R^2 H;$ <p>Площа бічної поверхні конуса</p> $S = \pi Rl.$ |
| <p>Об'єм кулі</p> $V = \frac{4}{3} \pi R^3$ | <p>Площа поверхні сфери</p> $S = 4\pi R^2$ |

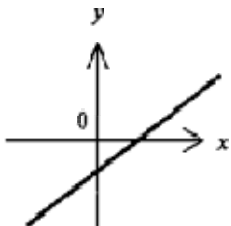
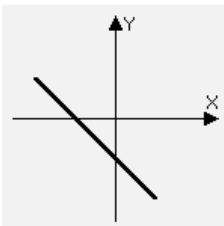
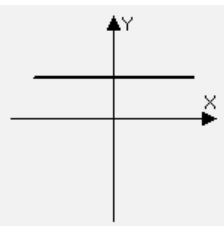
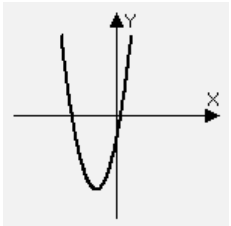
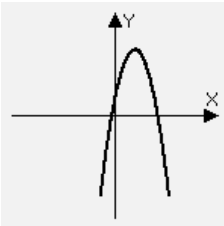
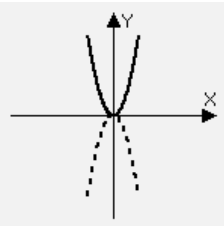
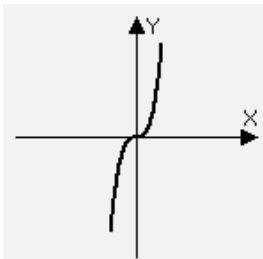
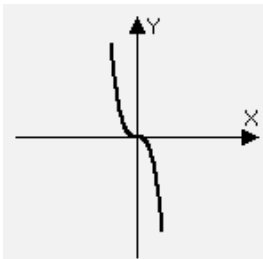
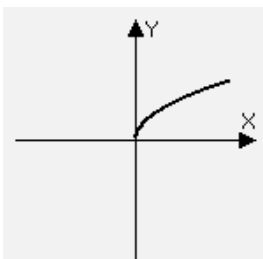
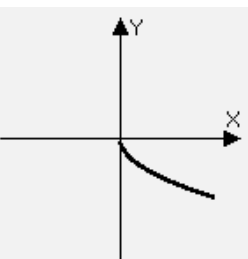
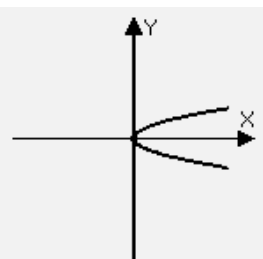
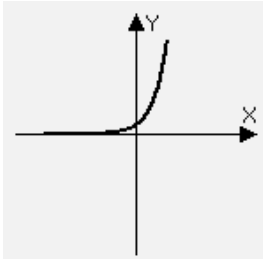
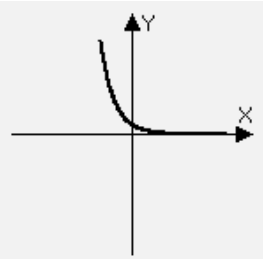
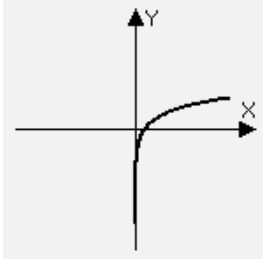
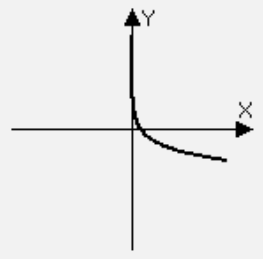
Властивості логарифмів

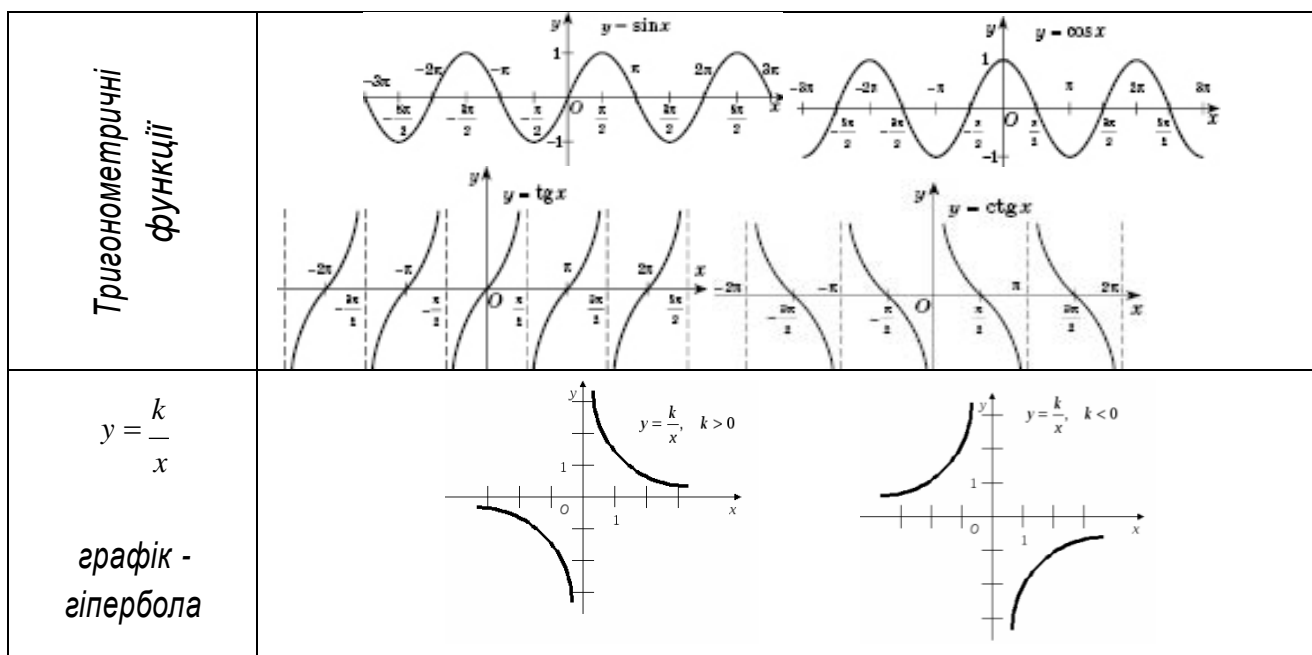
$$1. \ln a + \ln b = \ln(ab) \quad 2. \ln a - \ln b = \ln\left(\frac{a}{b}\right) \quad 3. n \ln a = \ln(a)^n \quad 4. \ln 1 = 0$$

Значення тригонометричних функцій

| α | Радіани | $\sin \alpha$ | $\cos \alpha$ | $\operatorname{tg} \alpha$ | $\operatorname{ctg} \alpha$ | α | Радіани | $\sin \alpha$ | $\cos \alpha$ | $\operatorname{tg} \alpha$ | $\operatorname{ctg} \alpha$ |
|----------|---------|---------------|---------------|----------------------------|-----------------------------|----------|---------|---------------|---------------|----------------------------|-----------------------------|
| 0° | 0,0000 | 0,0000 | 1,0000 | 0,0000 | ∞ | 46° | 0,8029 | 0,7193 | 0,6947 | 1,0355 | 0,9657 |
| 1° | 0,0175 | 0,0175 | 0,9998 | 0,0175 | 57,290 | 47° | 0,8203 | 0,7314 | 0,6820 | 1,0724 | 0,9325 |
| 2° | 0,0349 | 0,0349 | 0,9994 | 0,0349 | 28,636 | 48° | 0,8378 | 0,7431 | 0,6691 | 1,1106 | 0,9004 |
| 3° | 0,0524 | 0,0523 | 0,9986 | 0,0524 | 19,081 | 49° | 0,8552 | 0,7547 | 0,6561 | 1,1504 | 0,8693 |
| 4° | 0,0698 | 0,0698 | 0,9976 | 0,0699 | 14,300 | 50° | 0,8727 | 0,7660 | 0,6428 | 1,1918 | 0,8391 |
| 5° | 0,0873 | 0,0872 | 0,9962 | 0,0875 | 11,430 | 51° | 0,8901 | 0,7771 | 0,6293 | 1,2349 | 0,8098 |
| 6° | 0,1047 | 0,1045 | 0,9945 | 0,1051 | 9,5144 | 52° | 0,9076 | 0,7880 | 0,6157 | 1,2799 | 0,7813 |
| 7° | 0,1222 | 0,1219 | 0,9925 | 0,1228 | 8,1443 | 53° | 0,9250 | 0,7986 | 0,6018 | 1,3270 | 0,7536 |
| 8° | 0,1396 | 0,1392 | 0,9903 | 0,1405 | 7,1154 | 54° | 0,9425 | 0,8090 | 0,5878 | 1,3764 | 0,7265 |
| 9° | 0,1571 | 0,1564 | 0,9877 | 0,1584 | 6,3138 | 55° | 0,9599 | 0,8192 | 0,5736 | 1,4281 | 0,7002 |
| 10° | 0,1745 | 0,1736 | 0,9848 | 0,1763 | 5,6713 | 56° | 0,9774 | 0,8290 | 0,5592 | 1,4826 | 0,6745 |
| 11° | 0,1920 | 0,1908 | 0,9816 | 0,1944 | 5,1446 | 57° | 0,9948 | 0,8387 | 0,5446 | 1,5399 | 0,6494 |
| 12° | 0,2094 | 0,2079 | 0,9781 | 0,2126 | 4,7046 | 58° | 1,0123 | 0,8480 | 0,5299 | 1,6003 | 0,6249 |
| 13° | 0,2269 | 0,2250 | 0,9744 | 0,2309 | 4,3315 | 59° | 1,0297 | 0,8572 | 0,5150 | 1,6643 | 0,6009 |
| 14° | 0,2443 | 0,2419 | 0,9703 | 0,2493 | 4,0108 | 60° | 1,0472 | 0,8660 | 0,5000 | 1,7321 | 0,5774 |
| 15° | 0,2618 | 0,2588 | 0,9659 | 0,2679 | 3,7321 | 61° | 1,0647 | 0,8746 | 0,4848 | 1,8040 | 0,5543 |
| 16° | 0,2793 | 0,2756 | 0,9613 | 0,2867 | 3,4874 | 62° | 1,0821 | 0,8829 | 0,4695 | 1,8807 | 0,5317 |
| 17° | 0,2967 | 0,2924 | 0,9563 | 0,3057 | 3,2709 | 63° | 1,0996 | 0,8910 | 0,4540 | 1,9626 | 0,5095 |
| 18° | 0,3142 | 0,3090 | 0,9511 | 0,3249 | 3,0777 | 64° | 1,1170 | 0,8988 | 0,4384 | 2,0503 | 0,4877 |
| 19° | 0,3316 | 0,3256 | 0,9455 | 0,3443 | 2,9042 | 65° | 1,1345 | 0,9063 | 0,4226 | 2,1445 | 0,4663 |
| 20° | 0,3491 | 0,3420 | 0,9397 | 0,3640 | 2,7475 | 66° | 1,1519 | 0,9135 | 0,4067 | 2,2460 | 0,4452 |
| 21° | 0,3665 | 0,3584 | 0,9336 | 0,3839 | 2,6051 | 67° | 1,1694 | 0,9205 | 0,3907 | 2,3559 | 0,4245 |
| 22° | 0,3840 | 0,3746 | 0,9272 | 0,4040 | 2,4751 | 68° | 1,1868 | 0,9272 | 0,3746 | 2,4751 | 0,4040 |
| 23° | 0,4014 | 0,3907 | 0,9205 | 0,4245 | 2,3559 | 69° | 1,2043 | 0,9336 | 0,3584 | 2,6051 | 0,3839 |
| 24° | 0,4189 | 0,4067 | 0,9135 | 0,4452 | 2,2460 | 70° | 1,2217 | 0,9397 | 0,3420 | 2,7475 | 0,3640 |
| 25° | 0,4363 | 0,4226 | 0,9063 | 0,4663 | 2,1445 | 71° | 1,2392 | 0,9455 | 0,3256 | 2,9042 | 0,3443 |
| 26° | 0,4538 | 0,4384 | 0,8988 | 0,4877 | 2,0503 | 72° | 1,2566 | 0,9511 | 0,3090 | 3,0777 | 0,3249 |
| 27° | 0,4712 | 0,4540 | 0,8910 | 0,5095 | 1,9626 | 73° | 1,2741 | 0,9563 | 0,2924 | 3,2709 | 0,3057 |
| 28° | 0,4887 | 0,4695 | 0,8829 | 0,5317 | 1,8807 | 74° | 1,2915 | 0,9613 | 0,2756 | 3,4874 | 0,2867 |
| 29° | 0,5061 | 0,4848 | 0,8746 | 0,5543 | 1,8040 | 75° | 1,3090 | 0,9659 | 0,2588 | 3,7321 | 0,2679 |
| 30° | 0,5236 | 0,5000 | 0,8660 | 0,5774 | 1,7321 | 76° | 1,3265 | 0,9703 | 0,2419 | 4,0108 | 0,2493 |
| 31° | 0,5411 | 0,5150 | 0,8572 | 0,6009 | 1,6643 | 77° | 1,3439 | 0,9744 | 0,2250 | 4,3315 | 0,2309 |
| 32° | 0,5585 | 0,5299 | 0,8480 | 0,6249 | 1,6003 | 78° | 1,3614 | 0,9781 | 0,2079 | 4,7046 | 0,2126 |
| 33° | 0,5760 | 0,5446 | 0,8387 | 0,6494 | 1,5399 | 79° | 1,3788 | 0,9816 | 0,1908 | 5,1446 | 0,1944 |
| 34° | 0,5934 | 0,5592 | 0,8290 | 0,6745 | 1,4826 | 80° | 1,3963 | 0,9848 | 0,1736 | 5,6713 | 0,1763 |
| 35° | 0,6109 | 0,5736 | 0,8192 | 0,7002 | 1,4281 | 81° | 1,4137 | 0,9877 | 0,1564 | 6,3138 | 0,1584 |
| 36° | 0,6283 | 0,5878 | 0,8090 | 0,7265 | 1,3764 | 82° | 1,4312 | 0,9903 | 0,1392 | 7,1154 | 0,1405 |
| 37° | 0,6458 | 0,6018 | 0,7986 | 0,7536 | 1,3270 | 83° | 1,4486 | 0,9925 | 0,1219 | 8,1443 | 0,1228 |
| 38° | 0,6632 | 0,6157 | 0,7880 | 0,7813 | 1,2799 | 84° | 1,4661 | 0,9945 | 0,1045 | 9,5144 | 0,1051 |
| 39° | 0,6807 | 0,6293 | 0,7771 | 0,8098 | 1,2349 | 85° | 1,4835 | 0,9962 | 0,0872 | 11,430 | 0,0875 |
| 40° | 0,6981 | 0,6428 | 0,7660 | 0,8391 | 1,1918 | 86° | 1,5010 | 0,9976 | 0,0698 | 14,300 | 0,0699 |
| 41° | 0,7156 | 0,6561 | 0,7547 | 0,8693 | 1,1504 | 87° | 1,5184 | 0,9986 | 0,0523 | 19,081 | 0,0524 |
| 42° | 0,7330 | 0,6691 | 0,7431 | 0,9004 | 1,1106 | 88° | 1,5359 | 0,9994 | 0,0349 | 28,636 | 0,0349 |
| 43° | 0,7505 | 0,6820 | 0,7314 | 0,9325 | 1,0724 | 89° | 1,5533 | 0,9998 | 0,0175 | 57,290 | 0,0175 |
| 44° | 0,7679 | 0,6947 | 0,7193 | 0,9657 | 1,0355 | 90° | 1,5708 | 1,0000 | 0,0000 | ∞ | 0,0000 |
| 45° | 0,7854 | 0,7071 | 0,7071 | 1,0000 | 1,0000 | | | | | | |

Графіки деяких елементарних функцій (схематичний рисунок)

| | | | |
|--|--|---|---|
| $y = kx + b$ графік – пряма | $k > 0$  | $k < 0$  | $k = 0 [y = b]$  |
| $y = ax^2 + bx + c$ графік – параболола | $a > 0$  | $a < 0$  | $a > 0 [y = ax^2] a < 0$  |
| $y = ax^3$ графік – кубічна параболола | $a > 0$  | $a < 0$  | |
| $y = a\sqrt{x}$ | $a > 0$  | $a < 0$  | $y^2 = x$  |
| $y = a^x$ | $a > 1 (y = e^x)$  | $0 < a < 1$  | |
| $y = \log_a x$ | $a > 1 (y = \ln x)$  | $0 < a < 1$  | |



Деякі тригонометричні формули

| | | |
|---|---|--|
| $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ | $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ | $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ |
| $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1$ | $1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ | $1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$ |
| $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$ | $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$ | $\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$ |
| $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ | $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$ | $\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$ |
| $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$ | $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$ | $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y}$ |
| $\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}$ | $\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$ | $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x-y)}{\cos x \cos y}$ |
| $\sin x \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$ | $\cos x \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$ | $\sin x \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$ |

Значення тригонометричних функцій деяких кутів

| | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | π |
|-----------------------------|----------|----------------------|----------------------|----------------------|-----------------|----------|
| $\sin \alpha$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 | 0 |
| \cos | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | -1 |
| $\operatorname{tg} \alpha$ | 0 | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | Не існує | 0 |
| $\operatorname{ctg} \alpha$ | Не існує | $\sqrt{3}$ | 1 | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 0 | Не існує |

Таблиця 1. Значення функції $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

| X | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0.0 | 0.3989 | 0.3989 | 0.3989 | 0.3988 | 0.3986 | 0.3984 | 0.3982 | 0.3980 | 0.3977 | 0.3973 |
| 0.1 | 0.3970 | 0.3965 | 0.3961 | 0.3956 | 0.3951 | 0.3945 | 0.3939 | 0.3932 | 0.3925 | 0.3918 |
| 0.2 | 0.3910 | 0.3902 | 0.3894 | 0.3885 | 0.3876 | 0.3867 | 0.3857 | 0.3847 | 0.3836 | 0.3825 |
| 0.3 | 0.3814 | 0.3802 | 0.3790 | 0.3778 | 0.3765 | 0.3752 | 0.3739 | 0.3725 | 0.3712 | 0.3697 |
| 0.4 | 0.3683 | 0.3668 | 0.3653 | 0.3637 | 0.3621 | 0.3605 | 0.3589 | 0.3572 | 0.3555 | 0.3538 |
| 0.5 | 0.3521 | 0.3503 | 0.3485 | 0.3467 | 0.3448 | 0.3429 | 0.3410 | 0.3391 | 0.3372 | 0.3352 |
| 0.6 | 0.3332 | 0.3312 | 0.3292 | 0.3271 | 0.3251 | 0.3230 | 0.3209 | 0.3187 | 0.3166 | 0.3144 |
| 0.7 | 0.3123 | 0.3101 | 0.3079 | 0.3056 | 0.3034 | 0.3011 | 0.2989 | 0.2966 | 0.2943 | 0.2920 |
| 0.8 | 0.2897 | 0.2874 | 0.2850 | 0.2827 | 0.2803 | 0.2780 | 0.2756 | 0.2732 | 0.2709 | 0.2685 |
| 0.9 | 0.2661 | 0.2637 | 0.2613 | 0.2589 | 0.2565 | 0.2541 | 0.2516 | 0.2492 | 0.2468 | 0.2444 |
| 1.0 | 0.2420 | 0.2396 | 0.2371 | 0.2347 | 0.2323 | 0.2299 | 0.2275 | 0.2251 | 0.2227 | 0.2203 |
| 1.1 | 0.2179 | 0.2155 | 0.2131 | 0.2107 | 0.2083 | 0.2059 | 0.2036 | 0.2012 | 0.1989 | 0.1965 |
| 1.2 | 0.1942 | 0.1919 | 0.1895 | 0.1872 | 0.1849 | 0.1826 | 0.1804 | 0.1781 | 0.1758 | 0.1736 |
| 1.3 | 0.1714 | 0.1691 | 0.1669 | 0.1647 | 0.1626 | 0.1604 | 0.1582 | 0.1561 | 0.1539 | 0.1518 |
| 1.4 | 0.1497 | 0.1476 | 0.1456 | 0.1435 | 0.1415 | 0.1394 | 0.1374 | 0.1354 | 0.1334 | 0.1315 |
| 1.5 | 0.1295 | 0.1276 | 0.1257 | 0.1238 | 0.1219 | 0.1200 | 0.1182 | 0.1163 | 0.1145 | 0.1127 |
| 1.6 | 0.1109 | 0.1092 | 0.1074 | 0.1057 | 0.1040 | 0.1023 | 0.1006 | 0.0989 | 0.0973 | 0.0957 |
| 1.7 | 0.0940 | 0.0925 | 0.0909 | 0.0893 | 0.0878 | 0.0863 | 0.0848 | 0.0833 | 0.0818 | 0.0804 |
| 1.8 | 0.0790 | 0.0775 | 0.0761 | 0.0748 | 0.0734 | 0.0721 | 0.0707 | 0.0694 | 0.0681 | 0.0669 |
| 1.9 | 0.0656 | 0.0644 | 0.0632 | 0.0620 | 0.0608 | 0.0596 | 0.0584 | 0.0573 | 0.0562 | 0.0551 |
| 2.0 | 0.0540 | 0.0529 | 0.0519 | 0.0508 | 0.0498 | 0.0488 | 0.0478 | 0.0468 | 0.0459 | 0.0449 |
| 2.1 | 0.0440 | 0.0431 | 0.0422 | 0.0413 | 0.0404 | 0.0396 | 0.0387 | 0.0379 | 0.0371 | 0.0363 |
| 2.2 | 0.0355 | 0.0347 | 0.0339 | 0.0332 | 0.0325 | 0.0317 | 0.0310 | 0.0303 | 0.0297 | 0.0290 |
| 2.3 | 0.0283 | 0.0277 | 0.0270 | 0.0264 | 0.0258 | 0.0252 | 0.0246 | 0.0241 | 0.0235 | 0.0229 |
| 2.4 | 0.0224 | 0.0219 | 0.0213 | 0.0208 | 0.0203 | 0.0198 | 0.0194 | 0.0189 | 0.0184 | 0.0180 |
| 2.5 | 0.0175 | 0.0171 | 0.0167 | 0.0163 | 0.0158 | 0.0154 | 0.0151 | 0.0147 | 0.0143 | 0.0139 |
| 2.6 | 0.0136 | 0.0132 | 0.0129 | 0.0126 | 0.0122 | 0.0119 | 0.0116 | 0.0113 | 0.0110 | 0.0107 |
| 2.7 | 0.0104 | 0.0101 | 0.0099 | 0.0096 | 0.0093 | 0.0091 | 0.0088 | 0.0086 | 0.0084 | 0.0081 |
| 2.8 | 0.0079 | 0.0077 | 0.0075 | 0.0073 | 0.0071 | 0.0069 | 0.0067 | 0.0065 | 0.0063 | 0.0061 |
| 2.9 | 0.0060 | 0.0058 | 0.0056 | 0.0055 | 0.0053 | 0.0051 | 0.0050 | 0.0048 | 0.0047 | 0.0046 |
| 3.0 | 0.0044 | 0.0043 | 0.0042 | 0.0040 | 0.0039 | 0.0038 | 0.0037 | 0.0036 | 0.0035 | 0.0034 |
| 3.1 | 0.0033 | 0.0032 | 0.0031 | 0.0030 | 0.0029 | 0.0028 | 0.0027 | 0.0026 | 0.0025 | 0.0025 |
| 3.2 | 0.0024 | 0.0023 | 0.0022 | 0.0022 | 0.0021 | 0.0020 | 0.0020 | 0.0019 | 0.0018 | 0.0018 |

Таблиця 2. Значення функції Лапласа $\Phi(x) = \int_0^x \varphi(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.

| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|-----|---------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0,0 | 0,0000 | 0,0041 | 0,0080 | 0,0120 | 0,0160 | 0,0199 | 0,0239 | 0,0279 | 0,0319 | 0,0359 |
| 0,1 | 0,0393 | 0,0438 | 0,0478 | 0,0517 | 0,0557 | 0,0596 | 0,0636 | 0,0675 | 0,0714 | 0,0753 |
| 0,2 | 0,0793 | 0,0832 | 0,0871 | 0,0910 | 0,0948 | 0,0987 | 0,1026 | 0,1064 | 0,1103 | 0,1141 |
| 0,3 | 0,1179 | 0,1217 | 0,1255 | 0,1293 | 0,1331 | 0,1368 | 0,1406 | 0,1443 | 0,1480 | 0,1517 |
| 0,4 | 0,1554 | 0,1591 | 0,1628 | 0,1664 | 0,1700 | 0,1736 | 0,1772 | 0,1808 | 0,1844 | 0,1879 |
| 0,5 | 0,1915 | 0,1950 | 0,1985 | 0,2019 | 0,2054 | 0,2088 | 0,2123 | 0,2157 | 0,2190 | 0,2224 |
| 0,6 | 0,2257 | 0,2291 | 0,2324 | 0,2357 | 0,2389 | 0,2422 | 0,2454 | 0,2486 | 0,2517 | 0,2549 |
| 0,7 | 0,2580 | 0,2611 | 0,2642 | 0,2673 | 0,2703 | 0,2734 | 0,2764 | 0,2794 | 0,2823 | 0,2852 |
| 0,8 | 0,2381 | 0,2910 | 0,2939 | 0,2967 | 0,2995 | 0,3123 | 0,3051 | 0,3078 | 0,3106 | 0,3133 |
| 0,9 | 0,3159 | 0,3186 | 0,3212 | 0,3238 | 0,3264 | 0,3289 | 0,3315 | 0,3340 | 0,3365 | 0,3389 |
| 1,0 | 0,3413 | 0,3438 | 0,3461 | 0,3485 | 0,3508 | 0,3531 | 0,3554 | 0,3577 | 0,3599 | 0,3621 |
| 1,1 | 0,36430 | 0,3665 | 0,3686 | 0,3708 | 0,3729 | 0,3749 | 0,3770 | 0,3790 | 0,3810 | 0,3830 |
| 1,2 | 0,3849 | 0,3869 | 0,3888 | 0,3907 | 0,3925 | 0,3944 | 0,3962 | 0,3980 | 0,3997 | 0,4015 |
| 1,3 | 0,40320 | 0,4049 | 0,4066 | 0,4052 | 0,4099 | 0,4115 | 0,4131 | 0,4147 | 0,4162 | 0,4177 |
| 1,4 | 0,4192 | 0,4217 | 0,4222 | 0,4236 | 0,4251 | 0,4265 | 0,4279 | 0,4292 | 0,4306 | 0,4319 |
| 1,5 | 0,43320 | 0,4345 | 0,4357 | 0,4370 | 0,4382 | 0,4394 | 0,4406 | 0,4418 | 0,4429 | 0,4441 |
| 1,6 | 0,4452 | 0,4463 | 0,4474 | 0,4484 | 0,4495 | 0,4505 | 0,4515 | 0,4525 | 0,4535 | 0,4545 |
| 1,7 | 0,4554 | 0,4565 | 0,4573 | 0,4582 | 0,4591 | 0,4599 | 0,4608 | 0,4616 | 0,4625 | 0,4633 |
| 1,8 | 0,4641 | 0,4649 | 0,4656 | 0,4664 | 0,4671 | 0,4678 | 0,4686 | 0,4693 | 0,4699 | 0,4706 |
| 1,9 | 0,4713 | 0,4719 | 0,4726 | 0,4732 | 0,4738 | 0,4744 | 0,4750 | 0,4756 | 0,4761 | 0,4767 |
| 2,0 | 0,4772 | 0,4778 | 0,4783 | 0,4788 | 0,4798 | 0,4798 | 0,4803 | 0,4803 | 0,4812 | 0,4817 |
| 2,1 | 0,4821 | 0,4826 | 0,4830 | 0,4834 | 0,4838 | 0,4842 | 0,4846 | 0,4850 | 0,4854 | 0,4857 |
| 2,2 | 0,4861 | 0,4864 | 0,4868 | 0,4871 | 0,4875 | 0,4878 | 0,4881 | 0,4884 | 0,4887 | 0,4890 |
| 2,3 | 0,4893 | 0,4896 | 0,4898 | 0,4901 | 0,4904 | 0,4906 | 0,4909 | 0,4911 | 0,4913 | 0,4916 |
| 2,4 | 0,4918 | 0,4920 | 0,4922 | 0,4925 | 0,4927 | 0,4929 | 0,4931 | 0,4932 | 0,4934 | 0,4936 |
| 2,5 | 0,4938 | 0,4940 | 0,4941 | 0,4943 | 0,4945 | 0,4946 | 0,4948 | 0,4949 | 0,4951 | 0,4952 |
| 2,6 | 0,4953 | 0,4955 | 0,4956 | 0,4957 | 0,4959 | 0,4960 | 0,4951 | 0,4962 | 0,4963 | 0,4964 |
| 2,7 | 0,4965 | 0,4966 | 0,4967 | 0,4968 | 0,4969 | 0,4970 | 0,4971 | 0,4972 | 0,4973 | 0,4974 |
| 2,8 | 0,4974 | 0,4975 | 0,4976 | 0,4977 | 0,4977 | 0,4978 | 0,4979 | 0,4979 | 0,4980 | 0,4981 |
| 2,9 | 0,4981 | 0,4982 | 0,4982 | 0,4983 | 0,4984 | 0,4984 | 0,4985 | 0,4985 | 0,4986 | 0,4986 |
| 3,0 | 0,4987 | 0,4987 | 0,4987 | 0,4988 | 0,4988 | 0,4989 | 0,4989 | 0,4989 | 0,4990 | 0,4990 |
| 3,1 | 0,4990 | 0,4991 | 0,4991 | 0,4991 | 0,4992 | 0,4992 | 0,4992 | 0,4992 | 0,4993 | 0,4993 |
| 3,2 | 0,4993 | 0,4993 | 0,4994 | 0,4994 | 0,4994 | 0,4994 | 0,4994 | 0,4995 | 0,4995 | 0,4995 |
| 3,3 | 0,4995 | 0,4995 | 0,4995 | 0,4996 | 0,4996 | 0,4996 | 0,4996 | 0,4996 | 0,4996 | 0,4997 |

Таблиця 3. Критичні точки розподілу F Фішера - Снедекора

k_1 - число ступенів вільності більшої дисперсії

k_2 - число ступенів вільності меншої дисперсії

Рівень значущості $\alpha = 0,1$

| k_1 k_2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 20 |
|----------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|-------|
| 1 | 40 | 50 | 54 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 | 61 | 61 | 61 | 62 | 62 |
| 2 | 8,53 | 9,00 | 9,16 | 9,24 | 9,29 | 9,33 | 9,37 | 9,39 | 9,41 | 9,42 | 9,43 | 9,44 | 9,44 |
| 3 | 5,54 | 5,46 | 5,39 | 5,34 | 5,31 | 5,28 | 5,25 | 5,23 | 5,22 | 5,20 | 5,20 | 5,19 | 5,18 |
| 4 | 4,54 | 4,32 | 4,19 | 4,11 | 4,05 | 4,01 | 3,95 | 3,92 | 3,90 | 3,88 | 3,86 | 3,85 | 3,84 |
| 5 | 4,06 | 3,78 | 3,62 | 3,52 | 3,45 | 3,40 | 3,34 | 3,30 | 3,27 | 3,25 | 3,23 | 3,22 | 3,21 |
| 6 | 3,78 | 3,46 | 3,29 | 3,18 | 3,11 | 3,05 | 2,98 | 2,94 | 2,90 | 2,88 | 2,86 | 2,85 | 2,84 |
| 7 | 3,59 | 3,26 | 3,07 | 2,96 | 2,88 | 2,83 | 2,75 | 2,70 | 2,67 | 2,64 | 2,62 | 2,61 | 2,59 |
| 8 | 3,46 | 3,11 | 2,92 | 2,81 | 2,73 | 2,67 | 2,59 | 2,54 | 2,50 | 2,48 | 2,45 | 2,44 | 2,42 |
| 9 | 3,36 | 3,01 | 2,81 | 2,69 | 2,61 | 2,55 | 2,47 | 2,42 | 2,38 | 2,35 | 2,33 | 2,31 | 2,30 |
| 10 | 3,29 | 2,92 | 2,73 | 2,61 | 2,52 | 2,46 | 2,38 | 2,32 | 2,28 | 2,26 | 2,23 | 2,22 | 2,20 |
| 11 | 3,23 | 2,86 | 2,66 | 2,54 | 2,45 | 2,39 | 2,30 | 2,25 | 2,21 | 2,18 | 2,16 | 2,14 | 2,12 |
| 12 | 3,18 | 2,81 | 2,61 | 2,48 | 2,39 | 2,33 | 2,24 | 2,19 | 2,15 | 2,12 | 2,09 | 2,08 | 2,06 |
| 13 | 3,14 | 2,76 | 2,56 | 2,43 | 2,35 | 2,28 | 2,20 | 2,14 | 2,10 | 2,07 | 2,04 | 2,02 | 2,01 |
| 14 | 3,10 | 2,73 | 2,52 | 2,39 | 2,31 | 2,24 | 2,15 | 2,10 | 2,05 | 2,02 | 2,00 | 1,98 | 1,96 |
| 15 | 3,07 | 2,70 | 2,49 | 2,36 | 2,27 | 2,21 | 2,12 | 2,06 | 2,02 | 1,99 | 1,96 | 1,94 | 1,92 |
| 16 | 3,05 | 2,67 | 2,46 | 2,33 | 2,24 | 2,18 | 2,09 | 2,03 | 1,99 | 1,95 | 1,93 | 1,91 | 1,89 |
| 17 | 3,03 | 2,64 | 2,44 | 2,31 | 2,22 | 2,15 | 2,06 | 2,00 | 1,96 | 1,93 | 1,90 | 1,88 | 1,86 |
| 18 | 3,01 | 2,62 | 2,42 | 2,29 | 2,20 | 2,13 | 2,04 | 1,98 | 1,93 | 1,90 | 1,87 | 1,85 | 1,84 |
| 19 | 2,99 | 2,61 | 2,40 | 2,27 | 2,18 | 2,11 | 2,02 | 1,96 | 1,91 | 1,88 | 1,85 | 1,83 | 1,81 |
| 20 | 2,97 | 2,59 | 2,38 | 2,25 | 2,16 | 2,09 | 2,00 | 1,94 | 1,89 | 1,86 | 1,83 | 1,81 | 1,79 |
| 21 | 2,96 | 2,57 | 2,36 | 2,23 | 2,14 | 2,08 | 1,98 | 1,92 | 1,87 | 1,84 | 1,81 | 1,79 | 1,78 |
| 22 | 2,95 | 2,56 | 2,35 | 2,22 | 2,13 | 2,06 | 1,97 | 1,90 | 1,86 | 1,83 | 1,80 | 1,78 | 1,76 |
| 23 | 2,94 | 2,55 | 2,34 | 2,21 | 2,11 | 2,05 | 1,95 | 1,89 | 1,84 | 1,81 | 1,78 | 1,76 | 1,74 |
| 24 | 2,93 | 2,54 | 2,33 | 2,19 | 2,10 | 2,04 | 1,94 | 1,88 | 1,83 | 1,80 | 1,77 | 1,75 | 1,73 |
| 25 | 2,92 | 2,53 | 2,32 | 2,18 | 2,09 | 2,02 | 1,93 | 1,87 | 1,82 | 1,79 | 1,76 | 1,74 | 1,72 |
| 26 | 2,91 | 2,52 | 2,31 | 2,17 | 2,08 | 2,01 | 1,92 | 1,86 | 1,81 | 1,77 | 1,75 | 1,72 | 1,71 |
| 27 | 2,90 | 2,51 | 2,30 | 2,17 | 2,07 | 2,00 | 1,91 | 1,85 | 1,80 | 1,76 | 1,74 | 1,71 | 1,70 |
| 28 | 2,89 | 2,50 | 2,29 | 2,16 | 2,06 | 2,00 | 1,90 | 1,84 | 1,79 | 1,75 | 1,73 | 1,70 | 1,69 |
| 30 | 2,88 | 2,49 | 2,28 | 2,14 | 2,05 | 1,98 | 1,88 | 1,82 | 1,77 | 1,74 | 1,71 | 1,69 | 1,67 |
| 32 | 2,87 | 2,48 | 2,26 | 2,13 | 2,04 | 1,97 | 1,87 | 1,81 | 1,76 | 1,72 | 1,69 | 1,67 | 1,65. |
| 34 | 2,86 | 2,47 | 2,25 | 2,12 | 2,02 | 1,96 | 1,86 | 1,79 | 1,75 | 1,71 | 1,68 | 1,66 | 1,64 |
| 36 | 2,85 | 2,46 | 2,24 | 2,11 | 2,01 | 1,94 | 1,85 | 1,78 | 1,73 | 1,70 | 1,67 | 1,65 | 1,63 |
| 38 | 2,84 | 2,45 | 2,23 | 2,10 | 2,01 | 1,94 | 1,84 | 1,77 | 1,72 | 1,69 | 1,66 | 1,63 | 1,61 |
| 40 | 2,84 | 2,44 | 2,23 | 2,09 | 2,00 | 1,93 | 1,83 | 1,76 | 1,71 | 1,68 | 1,65 | 1,62 | 1,61 |

Таблиця 4. Критичні точки розподілу F Фішера - Снедекора

k_1 - число ступенів вільності більшої дисперсії

Рівень значущості $\alpha = 0,05$

| k_2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 20 |
|-------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 1 | 161 | 199 | 216 | 225 | 230 | 234 | 239 | 242 | 244 | 245 | 246 | 247 | 248 |
| 2 | 18,5 | 19,0 | 19,2 | 19,2 | 19,3 | 19,3 | 19,4 | 19,4 | 19,4 | 19,4 | 19,4 | 19,4 | 19,4 |
| 3 | 10,1 | 9,55 | 9,28 | 9,12 | 9,01 | 8,94 | 8,85 | 8,79 | 8,74 | 8,71 | 8,69 | 8,67 | 8,66 |
| 4 | 7,71 | 6,94 | 6,59 | 6,39 | 6,26 | 6,16 | 6,04 | 5,96 | 5,91 | 5,87 | 5,84 | 5,82 | 5,80 |
| 5 | 6,61 | 5,79 | 5,41 | 5,19 | 5,05 | 4,95 | 4,82 | 4,74 | 4,68 | 4,64 | 4,60 | 4,58 | 4,56 |
| 6 | 5,99 | 5,14 | 4,76 | 4,53 | 4,39 | 4,28 | 4,15 | 4,06 | 4,00 | 3,96 | 3,92 | 3,90 | 3,87 |
| 7 | 5,59 | 4,74 | 4,35 | 4,12 | 3,97 | 3,87 | 3,73 | 3,64 | 3,57 | 3,53 | 3,49 | 3,47 | 3,44 |
| 8 | 5,32 | 4,46 | 4,07 | 3,84 | 3,69 | 3,58 | 3,44 | 3,35 | 3,28 | 3,24 | 3,20 | 3,17 | 3,15 |
| 9 | 5,12 | 4,26 | 3,86 | 3,63 | 3,48 | 3,37 | 3,23 | 3,14 | 3,07 | 3,03 | 2,99 | 2,96 | 2,94 |
| 10 | 4,96 | 4,10 | 3,71 | 3,48 | 3,33 | 3,22 | 3,07 | 2,98 | 2,91 | 2,86 | 2,83 | 2,80 | 2,77 |
| 11 | 4,84 | 3,98 | 3,59 | 3,36 | 3,20 | 3,09 | 2,95 | 2,85 | 2,79 | 2,74 | 2,70 | 2,67 | 2,65 |
| 12 | 4,75 | 3,89 | 3,49 | 3,26 | 3,11 | 3,00 | 2,85 | 2,75 | 2,69 | 2,64 | 2,60 | 2,57 | 2,54 |
| 13 | 4,67 | 3,81 | 3,41 | 3,18 | 3,03 | 2,92 | 2,77 | 2,67 | 2,60 | 2,55 | 2,51 | 2,48 | 2,46 |
| 14 | 4,60 | 3,74 | 3,34 | 3,11 | 2,96 | 2,85 | 2,70 | 2,60 | 2,53 | 2,48 | 2,44 | 2,41 | 2,39 |
| 15 | 4,54 | 3,68 | 3,29 | 3,06 | 2,90 | 2,79 | 2,64 | 2,54 | 2,48 | 2,42 | 2,38 | 2,35 | 2,33 |
| 16 | 4,49 | 3,63 | 3,24 | 3,01 | 2,85 | 2,74 | 2,59 | 2,49 | 2,42 | 2,37 | 2,33 | 2,30 | 2,28 |
| 17 | 4,45 | 3,59 | 3,20 | 2,96 | 2,81 | 2,70 | 2,55 | 2,45 | 2,38 | 2,33 | 2,29 | 2,26 | 2,23 |
| 18 | 4,41 | 3,55 | 3,16 | 2,93 | 2,77 | 2,66 | 2,51 | 2,41 | 2,34 | 2,29 | 2,25 | 2,22 | 2,19 |
| 19 | 4,38 | 3,52 | 3,13 | 2,90 | 2,74 | 2,63 | 2,48 | 2,38 | 2,31 | 2,26 | 2,21 | 2,18 | 2,16 |
| 20 | 4,35 | 3,49 | 3,10 | 2,87 | 2,71 | 2,60 | 2,45 | 2,35 | 2,28 | 2,22 | 2,18 | 2,15 | 2,12 |
| 21 | 4,32 | 3,47 | 3,07 | 2,84 | 2,68 | 2,57 | 2,42 | 2,32 | 2,25 | 2,20 | 2,16 | 2,12 | 2,10 |
| 22 | 4,30 | 3,44 | 3,05 | 2,82 | 2,66 | 2,55 | 2,40 | 2,30 | 2,23 | 2,17 | 2,13 | 2,10 | 2,07 |
| 23 | 4,28 | 3,42 | 3,03 | 2,80 | 2,64 | 2,53 | 2,37 | 2,27 | 2,20 | 2,15 | 2,11 | 2,08 | 2,05 |
| 24 | 4,26 | 3,40 | 3,01 | 2,78 | 2,62 | 2,51 | 2,36 | 2,25 | 2,18 | 2,13 | 2,09 | 2,05 | 2,03 |
| 25 | 4,24 | 3,39 | 2,99 | 2,76 | 2,60 | 2,49 | 2,34 | 2,24 | 2,16 | 2,11 | 2,07 | 2,04 | 2,01 |
| 26 | 4,23 | 3,37 | 2,98 | 2,74 | 2,59 | 2,47 | 2,32 | 2,22 | 2,15 | 2,09 | 2,05 | 2,02 | 1,99 |
| 27 | 4,21 | 3,35 | 2,96 | 2,73 | 2,57 | 2,46 | 2,31 | 2,20 | 2,13 | 2,08 | 2,04 | 2,00 | 1,97 |
| 28 | 4,20 | 3,34 | 2,95 | 2,71 | 2,56 | 2,45 | 2,29 | 2,19 | 2,12 | 2,06 | 2,02 | 1,99 | 1,96 |
| 30 | 4,17 | 3,32 | 2,92 | 2,69 | 2,53 | 2,42 | 2,27 | 2,16 | 2,09 | 2,04 | 1,99 | 1,96 | 1,93 |
| 32 | 4,15 | 3,29 | 2,90 | 2,67 | 2,51 | 2,40 | 2,24 | 2,14 | 2,07 | 2,01 | 1,97 | 1,94 | 1,91 |
| 34 | 4,13 | 3,28 | 2,88 | 2,65 | 2,49 | 2,38 | 2,23 | 2,12 | 2,05 | 1,99 | 1,95 | 1,92 | 1,89 |
| 36 | 4,11 | 3,26 | 2,87 | 2,63 | 2,48 | 2,36 | 2,21 | 2,11 | 2,03 | 1,98 | 1,93 | 1,90 | 1,87 |
| 38 | 4,10 | 3,24 | 2,85 | 2,62 | 2,46 | 2,35 | 2,19 | 2,09 | 2,02 | 1,96 | 1,92 | 1,88 | 1,85 |
| 40 | 4,08 | 3,23 | 2,84 | 2,61 | 2,45 | 2,34 | 2,18 | 2,08 | 2,00 | 1,95 | 1,90 | 1,87 | 1,84 |

Таблиця 5. Критичні точки розподілу F Фішера - Снедекора

k_1 - число ступенів вільності більшої дисперсії

k_2 - число ступенів вільності меншої дисперсії

Рівень значущості $\alpha = 0,01$

| $k_2 \backslash k_1$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
|----------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 1 | 4052 | 4999 | 5404 | 5624 | 5764 | 5859 | 5981 | 6056 | 6107 | 6143 | 6170 | 6191 |
| 2 | 98,5 | 99,0 | 99,2 | 99,2 | 99,3 | 99,3 | 99,4 | 99,4 | 99,4 | 99,4 | 99,4 | 99,4 |
| 3 | 34,1 | 30,8 | 29,5 | 28,7 | 28,2 | 27,9 | 27,5 | 27,2 | 27,1 | 26,9 | 26,8 | 26,8 |
| 4 | 21,2 | 18,0 | 16,7 | 16,0 | 15,5 | 15,2 | 14,8 | 14,6 | 14,4 | 14,3 | 14,2 | 14,1 |
| 5 | 16,3 | 13,3 | 12,1 | 11,4 | 11,0 | 10,7 | 10,3 | 10,1 | 9,89 | 9,77 | 9,68 | 9,61 |
| 6 | 13,7 | 10,9 | 9,78 | 9,15 | 8,75 | 8,47 | 8,10 | 7,87 | 7,72 | 7,60 | 7,52 | 7,45 |
| 7 | 12,2 | 9,55 | 8,45 | 7,85 | 7,46 | 7,19 | 6,84 | 6,62 | 6,47 | 6,36 | 6,28 | 6,21 |
| 8 | 11,3 | 8,65 | 7,59 | 7,01 | 6,63 | 6,37 | 6,03 | 5,81 | 5,67 | 5,56 | 5,48 | 5,41 |
| 9 | 10,6 | 8,02 | 6,99 | 6,42 | 6,06 | 5,80 | 5,47 | 5,26 | 5,11 | 5,01 | 4,92 | 4,86 |
| 10 | 10,0 | 7,56 | 6,55 | 5,99 | 5,64 | 5,39 | 5,06 | 4,85 | 4,71 | 4,60 | 4,52 | 4,46 |
| 11 | 9,65 | 7,21 | 6,22 | 5,67 | 5,32 | 5,07 | 4,74 | 4,54 | 4,40 | 4,29 | 4,21 | 4,15 |
| 12 | 9,33 | 6,93 | 5,95 | 5,41 | 5,06 | 4,82 | 4,50 | 4,30 | 4,16 | 4,05 | 3,97 | 3,91 |
| 13 | 9,07 | 6,70 | 5,74 | 5,21 | 4,86 | 4,62 | 4,30 | 4,10 | 3,96 | 3,86 | 3,78 | 3,72 |
| 14 | 8,86 | 6,51 | 5,56 | 5,04 | 4,69 | 4,46 | 4,14 | 3,94 | 3,80 | 3,70 | 3,62 | 3,56 |
| 15 | 8,68 | 6,36 | 5,42 | 4,89 | 4,56 | 4,32 | 4,00 | 3,80 | 3,67 | 3,56 | 3,49 | 3,42 |
| 16 | 8,53 | 6,23 | 5,29 | 4,77 | 4,44 | 4,20 | 3,89 | 3,69 | 3,55 | 3,45 | 3,37 | 3,31 |
| 17 | 8,40 | 6,11 | 5,19 | 4,67 | 4,34 | 4,10 | 3,79 | 3,59 | 3,46 | 3,35 | 3,27 | 3,21 |
| 18 | 8,29 | 6,01 | 5,09 | 4,58 | 4,25 | 4,01 | 3,71 | 3,51 | 3,37 | 3,27 | 3,19 | 3,13 |
| 19 | 8,18 | 5,93 | 5,01 | 4,50 | 4,17 | 3,94 | 3,63 | 3,43 | 3,30 | 3,19 | 3,12 | 3,05 |
| 20 | 8,10 | 5,85 | 4,94 | 4,43 | 4,10 | 3,87 | 3,56 | 3,37 | 3,23 | 3,13 | 3,05 | 2,99 |
| 21 | 8,02 | 5,78 | 4,87 | 4,37 | 4,04 | 3,81 | 3,51 | 3,31 | 3,17 | 3,07 | 2,99 | 2,93 |
| 22 | 7,95 | 5,72 | 4,82 | 4,31 | 3,99 | 3,76 | 3,45 | 3,26 | 3,12 | 3,02 | 2,94 | 2,88 |
| 23 | 7,88 | 5,66 | 4,76 | 4,26 | 3,94 | 3,71 | 3,41 | 3,21 | 3,07 | 2,97 | 2,89 | 2,83 |
| 24 | 7,82 | 5,61 | 4,72 | 4,22 | 3,90 | 3,67 | 3,36 | 3,17 | 3,03 | 2,93 | 2,85 | 2,79 |
| 25 | 7,77 | 5,57 | 4,68 | 4,18 | 3,85 | 3,63 | 3,32 | 3,13 | 2,99 | 2,89 | 2,81 | 2,75 |
| 26 | 7,72 | 5,53 | 4,64 | 4,14 | 3,82 | 3,59 | 3,29 | 3,09 | 2,96 | 2,86 | 2,78 | 2,72 |
| 27 | 7,68 | 5,49 | 4,60 | 4,11 | 3,78 | 3,56 | 3,26 | 3,06 | 2,93 | 2,82 | 2,75 | 2,68 |
| 28 | 7,64 | 5,45 | 4,57 | 4,07 | 3,75 | 3,53 | 3,23 | 3,03 | 2,90 | 2,79 | 2,72 | 2,65 |
| 30 | 7,56 | 5,39 | 4,51 | 4,02 | 3,70 | 3,47 | 3,17 | 2,98 | 2,84 | 2,74 | 2,66 | 2,60 |
| 32 | 7,50 | 5,34 | 4,46 | 3,97 | 3,65 | 3,43 | 3,13 | 2,93 | 2,80 | 2,70 | 2,62 | 2,55 |
| 34 | 7,44 | 5,29 | 4,42 | 3,93 | 3,61 | 3,39 | 3,09 | 2,89 | 2,76 | 2,66 | 2,58 | 2,51 |
| 36 | 7,40 | 5,25 | 4,38 | 3,89 | 3,57 | 3,35 | 3,05 | 2,86 | 2,72 | 2,62 | 2,54 | 2,48 |
| 38 | 7,35 | 5,21 | 4,34 | 3,86 | 3,54 | 3,32 | 3,02 | 2,83 | 2,69 | 2,59 | 2,51 | 2,45 |
| 40 | 7,31 | 5,18 | 4,31 | 3,83 | 3,51 | 3,29 | 2,99 | 2,80 | 2,66 | 2,56 | 2,48 | 2,42 |

Таблиця 6. Критичні точки розподілу F Фішера - Снедекора

k_1 - число ступенів вільності більшої дисперсії

k_2 - число ступенів вільності меншої дисперсії

Рівень значущості $\alpha = 0,005$

| k_1 k_2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 |
|----------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1 | 16212 | 19997 | 21614 | 22501 | 23056 | 23440 | 23924 | 24222 | 24427 | 24572 |
| 2 | 198,5 | 199,0 | 199,2 | 199,2 | 199,3 | 199,3 | 199,4 | 199,4 | 199,4 | 199,4 |
| 3 | 55,55 | 49,80 | 47,47 | 46,20 | 45,39 | 44,84 | 44,13 | 43,68 | 43,39 | 43,17 |
| 4 | 31,33 | 26,28 | 24,26 | 23,15 | 22,46 | 21,98 | 21,35 | 20,97 | 20,70 | 20,51 |
| 5 | 22,78 | 18,31 | 16,53 | 15,56 | 14,94 | 14,51 | 13,96 | 13,62 | 13,38 | 13,21 |
| 6 | 18,63 | 14,54 | 12,92 | 12,03 | 11,46 | 11,07 | 10,57 | 10,25 | 10,03 | 9,88 |
| 7 | 16,24 | 12,40 | 10,88 | 10,05 | 9,52 | 9,16 | 8,68 | 8,38 | 8,18 | 8,03 |
| 8 | 14,69 | 11,04 | 9,60 | 8,81 | 8,30 | 7,95 | 7,50 | 7,21 | 7,01 | 6,87 |
| 9 | 13,61 | 10,11 | 8,72 | 7,96 | 7,47 | 7,13 | 6,69 | 6,42 | 6,23 | 6,09 |
| 10 | 12,83 | 9,43 | 8,08 | 7,34 | 6,87 | 6,54 | 6,12 | 5,85 | 5,66 | 5,53 |
| 11 | 12,23 | 8,91 | 7,60 | 6,88 | 6,42 | 6,10 | 5,68 | 5,42 | 5,24 | 5,10 |
| 12 | 11,75 | 8,51 | 7,23 | 6,52 | 6,07 | 5,76 | 5,35 | 5,09 | 4,91 | 4,77 |
| 13 | 11,37 | 8,19 | 6,93 | 6,23 | 5,79 | 5,48 | 5,08 | 4,82 | 4,64 | 4,51 |
| 14 | 11,06 | 7,92 | 6,68 | 6,00 | 5,56 | 5,26 | 4,86 | 4,60 | 4,43 | 4,30 |
| 15 | 10,80 | 7,70 | 6,48 | 5,80 | 5,37 | 5,07 | 4,67 | 4,42 | 4,25 | 4,12 |
| 16 | 10,58 | 7,51 | 6,30 | 5,64 | 5,21 | 4,91 | 4,52 | 4,27 | 4,10 | 3,97 |
| 17 | 10,38 | 7,35 | 6,16 | 5,50 | 5,07 | 4,78 | 4,39 | 4,14 | 3,97 | 3,84 |
| 18 | 10,22 | 7,21 | 6,03 | 5,37 | 4,96 | 4,66 | 4,28 | 4,03 | 3,86 | 3,73 |
| 19 | 10,07 | 7,09 | 5,92 | 5,27 | 4,85 | 4,56 | 4,18 | 3,93 | 3,76 | 3,64 |
| 20 | 9,94 | 6,99 | 5,82 | 5,17 | 4,76 | 4,47 | 4,09 | 3,85 | 3,68 | 3,55 |
| 21 | 9,83 | 6,89 | 5,73 | 5,09 | 4,68 | 4,39 | 4,01 | 3,77 | 3,60 | 3,48 |
| 22 | 9,73 | 6,81 | 5,65 | 5,02 | 4,61 | 4,32 | 3,94 | 3,70 | 3,54 | 3,41 |
| 23 | 9,63 | 6,73 | 5,58 | 4,95 | 4,54 | 4,26 | 3,88 | 3,64 | 3,47 | 3,35 |
| 24 | 9,55 | 6,66 | 5,52 | 4,89 | 4,49 | 4,20 | 3,83 | 3,59 | 3,42 | 3,30 |
| 25 | 9,48 | 6,60 | 5,46 | 4,84 | 4,43 | 4,15 | 3,78 | 3,54 | 3,37 | 3,25 |
| 26 | 9,41 | 6,54 | 5,41 | 4,79 | 4,38 | 4,10 | 3,73 | 3,49 | 3,33 | 3,20 |
| 27 | 9,34 | 6,49 | 5,36 | 4,74 | 4,34 | 4,06 | 3,69 | 3,45 | 3,28 | 3,16 |
| 28 | 9,28 | 6,44 | 5,32 | 4,70 | 4,30 | 4,02 | 3,65 | 3,41 | 3,25 | 3,12 |
| 30 | 9,18 | 6,35 | 5,24 | 4,62 | 4,23 | 3,95 | 3,58 | 3,34 | 3,18 | 3,06 |
| 32 | 9,09 | 6,28 | 5,17 | 4,56 | 4,17 | 3,89 | 3,52 | 3,29 | 3,12 | 3,00 |
| 34 | 9,01 | 6,22 | 5,11 | 4,50 | 4,11 | 3,84 | 3,47 | 3,24 | 3,07 | 2,95 |
| 36 | 8,94 | 6,16 | 5,06 | 4,46 | 4,06 | 3,79 | 3,42 | 3,19 | 3,03 | 2,90 |
| 38 | 8,88 | 6,11 | 5,02 | 4,41 | 4,02 | 3,75 | 3,39 | 3,15 | 2,99 | 2,87 |
| 40 | 8,83 | 6,07 | 4,98 | 4,37 | 3,99 | 3,71 | 3,35 | 3,12 | 2,95 | 2,83 |

ЛІТЕРАТУРА

1. Вища математика: підруч. для студ. вищ. навч. закл./ Призва Г.Й., Плахотник В.В., Гординський Л.Д. та ін.: за ред. Г.Л.Кулініча.– Вид. 2-ге (відредаг. і доповн.). –К.: Либідь, 2019.– 400с.
2. Дубовик В.П. Вища математика: Навч. посібник. / Дубовик В.П., Юрик І.І., - К.: А.С.К., 2018.- 648 с.
3. Вища математика: приклади і задачі. / Дюженкова Л.І. Дюженкова О.Ю. Михалін Г.О.. - К.: Видавничий центр «Академія», 2018.- 624с.
4. Вища математика. Курс лекцій у трьох частинах. Частина 1. Лінійна алгебра, аналітична геометрія, математичний аналіз: навчальний посібник./ Лавренчук В.П., Готинчан Т.І., Дронь В.С., Кондур О.С. - Чернівці: Рута, 2017.- 440с.
5. Шкіль М.І., Вища математика: підручник: У 3 кн.: кн. 2. Диференційне та інтегральне числення функцій однієї змінної. Ряди. / Шкіль М.І., Колесник Т.В. - К.: Либідь 1994-352с.
6. Невизначений інтеграл: метод.рек. до проведення практ. занять та сам. роботи студ. фак. економіки і підприємництва / Уманський НУС : [уклад. В.Є. Березовський, С. А. Закорчевна, С.В. Лещенко, Р.В. Ненька, Т. І.Труш.] - Умань: Вид-во КопіЦентр, 2015. - 70с.
7. Визначений інтеграл. Функції декількох змінних: метод. рек. до проведення практ. занять та сам. роботи студ. фак. економіки і підприємництва / Уманський НУС : [уклад. В.Є. Березовський, С.А.Закорчевна, С.В.Лещенко, Р.В.Ненька, Т.І.Труш.] - Умань: Вид-во КопіЦентр, 2017. - 74 с.
8. Диференціальні рівняння. Ряди: метод. рек. до проведення практ. занять та сам. роботи студ. фак. економіки і підприємництва / Уманський НУС : [уклад. В.Є. Березовський, С.А. Закорчевна, С.В. Лещенко, Р.В. Ненька, Т.І. Труш.] - Умань: Вид-во КопіЦентр, 2017. - 72 с.

Інформаційні ресурси

9. <http://www.allmath.ru/> - Електронні матеріали з математики.
10. <http://www.mathelp.spb.ru/> - Матеріали з вищої математики на допомогу студентам.
11. <http://mathem.h1.ru/> - Математика On- Line: довідкова інформація з математичних дисциплін.
12. <http://www.mcsme.ru/free-books/> - Сайт вільно розповсюджуваних видань, а також записки лекцій, збірник задач, програми курсів і т.д.